

# Dreh-Schwingkreisel

Mühlenfeld, J.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 20, 1968,  
S. 126-164



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Dreh-Schwingkreis\*)

Von E. Mühlenfeld

Bericht aus dem Institut für Schwingungsforschung  
der Fraunhofer-Gesellschaft, Tübingen

Vorgelegt von Eduard Pestel  
(Eingegangen am 17. 8. 1967)

Übersicht: Die Theorie eines Wendekreises mit rotierendem Schwingungssystem wird entwickelt und der Theorie anderer Wendekreise gegenübergestellt. Ein Versuchsgesetz, dessen Aufbau beschrieben wird, erreicht eine Ansprechschwelle von  $0,05^\circ/\text{h}$ .

## Verzeichnis der wichtigsten Symbole

$A, B, C$	Hauptträgheitsmomente
$D$	Richtfaktor
$G$	Schubmodul
$M$	Drehmoment
$T$	Umlaufzeit des Rotors
$a_x, a_y, a_z$	Komponenten eines Vektors in rotorfesten Koordinaten
$\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$	Komponenten eines Vektors in schwingerfesten Koordinaten
$a_1, a_2, a_3$	Komponenten eines Vektors in fahrzeugfesten Koordinaten
$b, d, l$	Breite, Dicke und Länge der Blattfedern
$c$	Abstand des Schwingerschwerpunkts von der Schwingerachse in der Rotationsebene gemessen
$g$	Erd- und Translationsbeschleunigung
$m_s$	Schwingermasse
$r$	Abstand des Schwingerschwerpunkts von der Schwingerachse, senkrecht zur Rotationsebene gemessen
$\beta$	Abklingkonstante der Schwingungen
$\vartheta$	Ausschlagwinkel
$q$	Dämpfungskoeffizient, Luftdichte
$\tau$	Schubspannung
$\Theta, \Psi, \Phi$	Eulersche Winkel, definiert durch Abb. 7
$\mathfrak{w} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$	Drehgeschwindigkeit des Fahrzeugs gegen ein Inertialsystem
$\mathfrak{w}^* = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	Drehgeschwindigkeit des Rotors gegen ein Inertialsystem
$\Omega$	Komponente von $\mathfrak{w}$ in der Rotationsebene, in Ungleichungen: Größenordnung der $\Omega$ ,
$\omega$	Rotationsfrequenz, also Drehgeschwindigkeit des Rotors gegen den Kreisrahmen
$\omega_0$	Eigenfrequenz des Schwingers bei stillstehendem Rotor (zugleich Eigenfrequenz der Rahmenschwingungen des gefesselten Kreises)
$\omega_*$	dynamische Eigenfrequenz des Schwingers
$\omega_R$	Resonanzfrequenz, bei der $\omega_* = \omega = \omega_R$ ist

\*) Auszug aus der Dissertation an der TH Hannover. Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Tischner, Herrn Dr.-Ing. A. Schief und dem Bundesministerium der Verteidigung für die Förderung dieser Arbeit.

## 1. Einführung

Wendezeiger mit rotierenden Schwingungssystemen, im folgenden Dreh-Schwingkreisel genannt, beruhen in ihrer Wirkungsweise, wie fast alle Geräte zur Messung der Drehgeschwindigkeit eines Fahrzeugs oder eines anderen Bezugskörpers gegen ein Inertialsystem, auf dem Gesetz von der Trägheit der Masse, d. h. auf der Eigenschaft der Masse, sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte geradlinig und gleichförmig fortzubewegen. Der Dreh-Schwingkreisel zählt daher zu den Trägheits-Navigationsinstrumenten.

Die Drehgeschwindigkeit wird meßbar durch die Coriolissche Kraft

$$\mathfrak{F} = 2m(\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}), \quad (1)$$

die an einer Masse  $m$  angreift, wenn sich diese Masse mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  in einem Bezugssystem bewegt, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\mathfrak{w}$  gegen ein Inertialsystem dreht. Da in Meßgeräten nur beschränkte Weglängen für die Bewegung einer Masse zugelassen werden können, muß diese Bewegung periodisch erfolgen. Damit die Coriolisschen Kräfte von translatorischen Beschleunigungskräften und der Schwerkraft meßtechnisch zu unterscheiden sind, ist es zweckmäßig, sie paarweise zu erzeugen und ihr Moment zu messen. Deshalb sind Paare gleicher Massen in Gegenphase periodisch zu bewegen.

Beim klassischen Wendekreisel, dem gefesselten Kreisel [1, p. 344], erfolgt diese periodische Bewegung auf kreisförmiger Bahn. Das Moment der am Rotor angreifenden Coriolisschen Kräfte wird über die Rotorlager durch Radialkräfte auf den Kreisrahmen übertragen und dreht diesen gegen das Moment einer Feder um die fahrzeugfeste Ausgangsachse. Die für die Führung von Massen auf kreisförmiger Bahn notwendigen Rotorlager verursachen Geräusche, die durch Abnutzung mit der Betriebszeit anwachsen. Bei der Übertragung des Nutzsymbols addieren sich die durch die Lager hervorgerufenen Geräusche als Störsignal.

Werden zwei Massen, z. B. die Zinken einer Stimmgabel [1, p. 369], [2], auf gerader Bahn in Gegenphase hin- und herbewegt, so sind keine Lager erforderlich. Es hat sich jedoch als schwierig erwiesen, Massen auf gerader Bahn ohne Reibung so zu führen, daß der Bewegungsablauf durch Temperaturschwankungen und Beschleunigungen nicht geändert wird. Die Anforderungen an die Symmetrie der Zinken und ihrer elastischen Eigenschaften stoßen an die Grenzen des fertigungstechnisch Möglichen.

In Anbetracht dieser Schwierigkeiten bei der Führung von Massen auf gerader Bahn stellt sich die Frage, ob man in dem Bemühen, Störungen von Kreisellagern auszuschalten, nicht zu weit geht, wenn man versucht, ganz ohne Lager auszukommen. Die Rotorlager des gefesselten Kreisels stören, weil sie mechanische Signale zu übertragen haben. Von dieser Aufgabe werden die Lager des Dreh-Schwingkreisels entbunden; die Coriolisschen Kräfte werden bereits im Rotor in ein elektrisches oder optisches Signal umgewandelt und in dieser Form auf das Fahrzeug übertragen. Die Rotation als einfach zu realisierende periodische Bewegung von Massen wird im Dreh-Schwingkreisel beibehalten.

In dieser Arbeit wird die Theorie des Dreh-Schwingkreisels abgeleitet, ferner werden Lösungen für die bei der Realisierung auftretenden technischen

Schwierigkeiten angegeben. Theorie und Versuchsergebnisse werden den Erkenntnissen und Ergebnissen mit anderen Wendezeigern gegenübergestellt.

## 2. Wirkungsweise des Dreh-Schwingkreisels

Der Dreh-Schwingkreisel besteht aus einem fest im Fahrzeug eingebauten Motor, dessen Wellenende gemäß Abb. 1 eine Lagerung trägt, die einem hantelförmigen Schwinger Drehschwingungen um die zur Motorwelle senkrechte  $x$ -Achse erlaubt. Der Schwinger und seine  $x$ -Achse rotieren dabei mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Dreht sich das Fahrzeug und hat der zugehörige Drehvektor  $\mathbf{w}$  eine Komponente  $\Omega$  in der Rotationsebene ( $x, y$ ) des Wendekreisels,

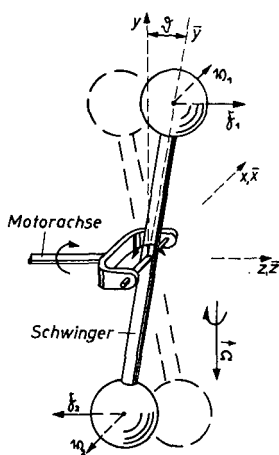


Abb. 1. Dreh-Schwingkreisel

so steht der Vektor der Umlaufgeschwindigkeit der Schwingermassen an zwei Stellen der Umlaufbahn senkrecht auf dieser Komponente des Drehvektors und hat an beiden Stellen entgegengesetzte Richtung. Dadurch entstehen Coriolissche Kräfte nach Gleichung (1) mit einem periodischen Moment um die Schwingerachse, das den Schwinger erregt, während die Zentrifugalkraft als Rückstellkraft wirkt. Die Amplitude der Schwingungen ist der Drehgeschwindigkeit proportional, während ihre Phase die Richtung des Drehvektors in der Rotationsebene anzeigt. Folglich werden mit einem Dreh-Schwingkreisel zwei Komponenten des Drehvektors  $\mathbf{w}$  gleichzeitig erfaßt.

Der Antriebsmotor setzt außer dem Schwinger noch andere Teile für die Signalabnahme und die aerodynamische Abschirmung in Rotation, die zusammenfassend Rotor genannt werden. Um möglichst große Amplituden der Drehschwingungen zu erhalten, wird ihre Eigenfrequenz auf die Frequenz des erregenden Momentes, also die Rotationsfrequenz, abgestimmt. In Resonanz eilt die Schwingeramplitude dem erregenden Moment um  $90^\circ$  nach. Wenn die Schwingeramplitude an zwei, zweckmäßig um  $90^\circ$  gegeneinander versetzten Stellen des Rotorumlaufs abgetastet wird, zeigt die Schwingerachse im Augen-

blick des Abtastens jeweils in die Richtung der zugehörigen Eingangsachse, also in die Richtung der zugehörigen Drehvektorkomponente. Beide Eingangsachsen liegen in der Rotationsebene des Dreh-Schwingkreisels.

Grundsätzlich kann der Schwinger jede beliebige geometrische Gestalt haben, wenn auch nicht jede Form zweckmäßig ist. Wichtig ist nur, daß der gyroskopische Körper um eine Achse schwingen kann, deren Richtung gleichförmig umläuft.

Eine sehr anschauliche Darstellung der Wirkungsweise des Dreh-Schwingkreisels ergibt sich, wenn man von der Vorstellung ausgeht, daß der Schwinger (Abb. 1) in seiner Lagerung völlig frei beweglich ist und daher stets in einer raumfesten Ebene rotiert. Ist diese Ebene nicht parallel zu der fahrzeugfesten Ebene senkrecht zur Rotorachse, so ändert ein achsenferner Punkt des Schwingers periodisch seinen Abstand von der fahrzeugfesten Ebene. Die Amplituden dieser Schwingungen würden ohne Dämpfung bei fortgesetzter Drehung des Fahrzeugs im Raum proportional zum durchlaufenen Drehwinkel anwachsen, wodurch ein Kurskreisels entstehen würde. Durch Dämpfung wird bei einer von der Drehgeschwindigkeit  $\Omega$  abhängigen Amplitude die gesamte durch die Drehung zugeführte Energie vernichtet und kann nicht mehr zur Vergrößerung der Schwingungsamplitude dienen.

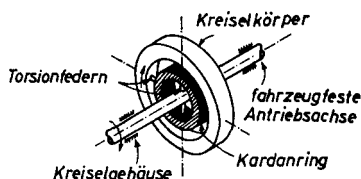
Auf dem geschilderten Prinzip beruht ein 1919 von *R. Eötvös* [3], [4] durchgeführter Versuch zum Nachweis der Schwereänderung, die ein auf der Erdoberfläche in östlicher oder westlicher Richtung bewegter Körper durch diese Bewegung erleidet; diese Bewegung führen die Massen des in Abb. 1 dargestellten Schwingers aus, wenn sie um eine vertikale Achse rotieren. *E. Arrea* hat im Jahre 1928 einen Wendezeiger mit rotierendem Schwingungssystem zum Patent angemeldet [5]; er stellt in seiner Patentschrift bereits qualitative Überlegungen zur Formgebung und Abstimmung des Schwingers an und schlägt mehrere Ausführungsmöglichkeiten vor. Spätere Patente [6] bis [12] befassen sich mit weiteren Varianten und bringen wenig grundsätzlich Neues. Ein in [12] angegebenes Verfahren zur elektromagnetischen Auskopplung des Signals aus dem Rotor, das später erläutert wird, verdient dagegen Beachtung.

Berichte über experimentelle Untersuchungen und Ergebnisse mit dem Dreh-Schwingkreisels liegen bisher nicht vor; die oben angegebenen Patentschriften beschreiben lediglich Aufbau und Wirkungsweise. Eine Theorie des Dreh-Schwingkreisels versucht *N. D. Diamantides* [13] aus den Gleichungen des gefesselten Kreisels dadurch zu gewinnen, daß er dessen gyroskopische Momente mit  $\sin \omega t$  multipliziert. Dadurch wird aber der Umlauf der Richtung der Schwingerachse mit der Kreisfrequenz  $\omega$  nicht in der erforderlichen Weise berücksichtigt. Die Schwingungsdifferentialgleichung des Dreh-Schwingkreisels ist kürzlich von *H. Sorg* [14] unter sinnvollen Vernachlässigungen hergeleitet worden. In Abschnitt 4 dieser Arbeit wird die Theorie ganz allgemein, lediglich unter Beschränkung auf kleine Schwingungsamplituden, entwickelt, um die Kopplung von anderen Drehachsen und den Einfluß von Drehbeschleunigungen abzuschätzen. In der Sowjetunion wurde schon 1963 auf Grund theoretischer Überlegungen die Ansicht vertreten, daß Wendezeiger mit rotierenden Schwingungssystemen größere Erfolgsaussichten haben als Stimmgabel-Wendezeiger [15].

### 3. Andere Rotor-Kreisel mit schwingenden Teilen

*E. W. Hove* und *P. H. Savet* [16] haben einen dynamisch abgestimmten, freien Kreisel entwickelt, der in Abb. 2 dargestellt ist. Ein ringförmiger Kreiselkörper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine fahrzeugfeste Antriebsachse und ist mit dieser Achse über einen Kardanring durch Torsionsfedern verbunden. Die Achse des Kreiselkörpers hat das Bestreben, raumfest zu bleiben; fällt sie nicht mit der Antriebsachse zusammen, so wird der Kardanring durch seine Lagerung zu Schwingungen gezwungen, deren Rückwirkung auf den Kreiselkörper einer Fesselung mit negativem Richtfaktor  $-C\omega^2$  entspricht. Diese kann so gewählt werden, daß sie die Wirkung der tatsächlich in der Kardanlagerung vorhandenen Feder bei einer bestimmten Rotationsfrequenz gerade aufhebt. Dadurch wird der Kreiselkörper vom Antrieb völlig entkoppelt; bei kleineren Drehzahlen wird der Kreisel zum Wendezeiger. Beschleunigungseinflüsse werden während einer Umdrehung weitgehend herausgemittelt. Da die Ausschlagwinkel begrenzt sind, ist die Verwendung dieses Geräts

Abb. 2. Dynamisch abgestimmter Kreisel  
nach *E. W. Hove* und *P. H. Savet*



nur auf Plattformen mit Folgeregelung möglich. Kritisch dürfte die Abstimmung sein, da die dynamisch erzeugte Federkonstante nicht beliebig verkleinert werden kann und die Drift proportional zur Abweichung der Differenz  $K - C\omega^2$  ( $K$  = Federkonstante der elastischen Fesselung) vom Sollwert ist, der beim freien Kreisel den Wert Null hat. Die Betriebsfrequenz und die Federkonstante  $K$  müssen daher sehr genau konstant gehalten werden. Ein integrierender Wendezeiger nach ähnlichem Prinzip wurde bereits von *B. Hamel* [12] angegeben.

In mehreren Patentschriften, z. B. [17], wird ein Wendezeiger vorgeschlagen, der sich vom gefesselten Kreisel durch einen unsymmetrischen, hantelförmigen Rotor unterscheidet. Eine Drehung um die Eingangsachse zeigt das Gerät nicht durch einen stationären Ausschlag, sondern durch Drehschwingungen des Rahmens mit der doppelten Rotationsfrequenz an. *H. Sorg* [14] hat diesen Wendekreisel mit unsymmetrischem Läufer theoretisch und experimentell untersucht und sieht in dem alternierenden Ausgangssignal dieses Wendezeigers einen Vorteil gegenüber dem gefesselten Kreisel. Dieses Signal muß jedoch wieder in mechanischer Form über die Rotorlager übertragen werden; *H. Sorg* weist darauf hin, daß es dabei wegen seiner periodischen Natur die Lager erheblich belastet und die zulässigen Drehzahlen beschränkt, da die Lagerbelastung quadratisch mit der Drehzahl wächst.

### 4. Theorie des Dreh-Schwingkreisels

Um die beim Dreh-Schwingkreisel auftretenden Drehbewegungen zu unterscheiden, wird im folgenden von Schwingungen, Rotationen und Drehungen

gesprochen, wobei unter Schwingungen die Drehschwingungen des Schwingers im Rotor verstanden werden, der seinerseits um eine fahrzeugfeste Achse im Kreiselgehäuse rotiert. Das Wort „Drehungen“ ist den Bewegungen des Fahrzeugs gegen ein Inertialsystem vorbehalten.

#### 4.1. Die Kreiselgleichung

Die Hauptträgheitsachsen des Schwingers sind die Achsen eines von den Einheitsvektoren  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  aufgespannten, schwingerfesten Koordinatensystems  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  (Abb. 1). Die Hauptträgheitsmomente in diesen Richtungen werden  $A, B$  und  $C$  genannt. Der Schwinger kann um die  $\bar{x}$ -Achse schwingen, die gleichzeitig  $x$ -Achse eines rotorfesten Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren  $e_x, e_y, e_z$  ist, dessen  $z$ -Achse in die Richtung der Rotorachse zeigt. Ursprung beider Systeme ist der Schwerpunkt des Schwingers. Der Winkel zwischen  $\bar{e}_y$  und  $e_y$  bzw.  $\bar{e}_z$  und  $e_z$  wird  $\vartheta$  genannt. Dieser Winkel ist zu messen.

Damit im rotorfesten System gerechnet werden kann, sind die Trägheits- und Deviationsmomente des Schwingers in diesem System zu ermitteln. Die Transformation ergibt, durchgeführt mit Hilfe eines Mohrschen Kreises [1, p. 75]

$$\begin{aligned} J_{xx} &= A, \\ J_{yy} &= \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C) \cos 2\vartheta, \\ J_{zz} &= \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) \cos 2\vartheta, \\ J_{yz} &= \frac{1}{2}(B - C) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Der Drehimpuls des Schwingers ist

$$\mathfrak{S} = J_{xx} \omega_x e_x + (J_{yy} \omega_y - J_{yz} \omega_z) e_y + (J_{zz} \omega_z - J_{yz} \omega_y) e_z, \quad (4.2)$$

mit

$$\mathfrak{w}^* = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \quad (4.3)$$

als Drehbewegung des Rotors gegen ein Inertialsystem. Die Größen  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sind die Komponenten dieses Vektors im rotorfesten Koordinatensystem. Für das um den Schwerpunkt wirksame Moment  $\mathfrak{M}$  gilt der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses, also

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \mathfrak{w}^* \times \mathfrak{S}. \quad (4.4)$$

Hier interessiert nur die Komponente um die  $x$ -Achse, die Schwingerachse. So wird

$$M_x = \frac{dH_x}{dt} + H_z \omega_y - H_y \omega_z. \quad (4.5)$$

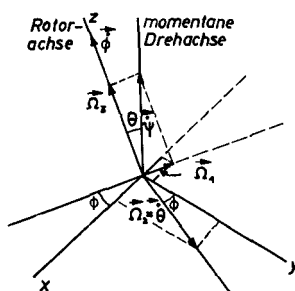
Mit der Beziehung (4.2) für den Drehimpuls wird hieraus

$$M_x = A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - B) \left[ \omega_y \omega_z \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} (\omega_y^2 - \omega_z^2) \sin 2\vartheta \right]. \quad (4.6)$$

Da eine allgemeine, instationäre Drehung behandelt werden soll, ist es für die folgenden Rechnungen zweckmäßig,  $\omega^*$  gemäß Abb. 3 durch die Eulerschen Winkel und deren zeitliche Ableitungen zu ersetzen [18, p. 34]. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\Theta} \sin \Phi - \dot{\Psi} \sin \Theta \cos \Phi, \\ \omega_y &= \dot{\Theta} \cos \Phi - \dot{\Psi} \sin \Theta \sin \Phi, \\ \omega_z &= \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Abb. 3. Eulersche Winkel



In Gleichung (4.6) sind die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \ddot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Theta} \dot{\Phi} \cos \Phi - \ddot{\Psi} \sin \Theta \cos \Phi - \dot{\Psi} \dot{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi + \\ &+ \dot{\Psi} \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_y \omega_z &= \dot{\Theta} \dot{\Phi} \cos \Phi + \dot{\Psi} \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \dot{\Psi} \cos \Phi \cos \Theta + \\ &+ \dot{\Psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\omega_y^2 = \dot{\Theta}^2 \cos^2 \Phi + 2 \dot{\Theta} \dot{\Psi} \sin \Theta \cos \Phi \sin \Phi + \dot{\Psi}^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi,$$

$$\omega_z^2 = \dot{\Phi}^2 + 2 \dot{\Phi} \dot{\Psi} \cos \Theta + \dot{\Psi}^2 \cos^2 \Theta$$

einzusetzen. Mit der üblichen Beschränkung auf kleine Ausschlagwinkel  $\vartheta$ , für die  $\sin 2\vartheta \approx 2\vartheta$  und  $\cos 2\vartheta \approx 1$  ist, ergibt sich beim Einsetzen der Gleichungen (4.8) in (4.6)

$$\begin{aligned} M_x &= [A \ddot{\Theta} + (A - B + C) \dot{\Psi} \dot{\Phi} \sin \Theta + (C - B) \dot{\Psi}^2 \sin \Theta \cos \Theta] \sin \Phi + \\ &+ [(A - B + C) \dot{\Theta} \dot{\Phi} - A \ddot{\Psi} \sin \Theta - (A + B - C) \dot{\Theta} \dot{\Psi} \cos \Theta] \cos \Phi + \\ &+ (C - B) [(\dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \sin \Theta \sin \Phi)^2 - \dot{\Phi}^2 - \\ &- (2 \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \Theta) \dot{\Psi} \cos \Theta] \vartheta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für  $\vartheta = 0$  ist (4.9) die erste der Kreiselgleichungen für die instationäre Bewegung eines kräftefreien, unsymmetrischen Kreisels.



Die Eulerschen Winkel waren für die bisherigen Rechnungen handlich, erschweren jedoch den anschaulichen Zugang zu den Ergebnissen. Deshalb wird ein Drehvektor  $\omega$  eingeführt, dessen Komponenten

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\Psi} \sin \Theta, \\ \Omega_2 &= \dot{\Theta}, \\ \Omega_3 &= \dot{\Psi} \cos \Theta\end{aligned}\quad (4.10)$$

in der Rotationsebene und in Richtung der Rotationsachse nach Abb. 3 die Drehung des Fahrzeugs gegen ein Internalsystem in fahrzeugfesten Koordinaten beschreiben. Die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \dot{\Phi} \quad (4.11)$$

ist die konstante Rotationsgeschwindigkeit. Mit den obigen Abkürzungen lautet die Kreiselgleichung

$$\begin{aligned}M_x &= [(A - B + C) \Omega_1 \omega + (C - B) \Omega_1 \Omega_3 + A \dot{\Omega}_2] \sin \omega t + \\ &+ [(A - B + C) \Omega_2 \omega + (C - B) \Omega_2 \Omega_3 - A \dot{\Omega}_1] \cos \omega t + \\ &+ (C - B) [(\Omega_2 \cos \omega t + \Omega_1 \sin \omega t)^2 - \omega^2 - (2 \omega + \Omega_3) \Omega_3] \vartheta.\end{aligned}\quad (4.12)$$

## 4.2. Die Differentialgleichung der Schwingung

Das Moment  $M_x$  erregt den gyroskopischen Körper zu Drehschwingungen um die Schwingerachse. Mit dem Dämpfungskoeffizienten  $\varrho$  und dem Richtfaktor  $D$  lautet die Differentialgleichung der Schwingung

$$A \ddot{\vartheta} + \varrho \dot{\vartheta} + D \vartheta = M_x. \quad (4.13)$$

Nach Division durch  $A$  wird die Abklingkonstante  $\beta = \varrho/2 A$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{A}}$  des Schwingers bei stillstehendem Rotor eingeführt. In die Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} + 2 \beta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = \frac{M_x}{A} \quad (4.14)$$

wird die Kreiselgleichung (4.12) eingesetzt. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} + 2 \beta \dot{\vartheta} + \left\{ \omega_0^2 + \frac{C-B}{A} [\omega^2 + 2 \omega \Omega_3 + \Omega_3^2 - (\Omega_2 \cos \omega t + \right. \\ \left. + \Omega_1 \sin \omega t)^2] \right\} \vartheta = \\ = \left[ \frac{A-B+C}{A} \Omega_1 \omega + \frac{C-B}{A} \Omega_1 \Omega_3 + \dot{\Omega}_2 \right] \sin \omega t + \\ + \left[ \frac{A-B+C}{A} \Omega_2 \omega + \frac{C-B}{A} \Omega_2 \Omega_3 - \dot{\Omega}_1 \right] \cos \omega t.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Im Rahmen des technisch Realisierbaren kann über die Hauptträgheitsmomente des Schwingers frei verfügt werden. Wird der Schwinger als Kreisscheibe oder flacher Zylinder ausgebildet, der um seine Achse schwingen kann, so ist  $C = B$ . Dann verschwindet in (4.12) der Koeffizient von  $\vartheta$ . Das kann

jedoch nicht als Vorteil dieser Schwingerform gewertet werden. Es ist im Gegenteil vorteilhaft, das Glied  $-(C - B) \omega^2 \vartheta$  als Rückstellmoment zu behalten, denn mit diesem Rückstellmoment hat die Eigenfrequenz des Schwingers für  $\omega_0 = 0$  den Wert

$$\omega^* = \sqrt{\frac{C - B}{A}} \omega \quad (4.16)$$

und ist daher für  $A = C - B$  stets auf die Frequenz des erregenden Momentes dynamisch abgestimmt.

Ein Körper, dessen eines Trägheitsmoment genau gleich der Summe der beiden anderen ist, läßt sich technisch nicht realisieren, weil bei Summation über die Massenelemente  $\Delta m$

$$A = \sum \Delta m (\bar{y}^2 + \bar{z}^2); \quad B = \sum \Delta m (\bar{z}^2 + \bar{x}^2); \quad C = \sum \Delta m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (4.17)$$

ist, und daher

$$C - B = \sum \Delta m (\bar{y}^2 - \bar{z}^2) \quad (4.18)$$

nur dann gleich  $A$  wird, wenn  $\bar{z} \equiv 0$  ist, der Körper also eine verschwindende Dicke hat. Doch läßt sich erreichen, daß

$$A \approx C - B \quad (4.19)$$

wird, wenn der Schwinger in  $z$ -Richtung flach ist. Dann ist für die Abstimmung nur ein kleines elastisches Richtmoment zusätzlich erforderlich.

Für einen solchen Schwinger läßt sich die Schwingungs-Differentialgleichung (4.15) vereinfachen; die dafür notwendigen Voraussetzungen werden sorgfältig notiert. Im Abschnitt 4.3 wird sich dann zeigen, daß fast die gleichen Näherungen in der Kreiseltheorie allgemein üblich und notwendig sind. Im Abschnitt 4.1 wurde vorausgesetzt, daß

$$(I) \quad \vartheta \ll 1 \quad (4.20)$$

ist, um  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  und  $\cos \vartheta \approx 1$  setzen zu können. Jetzt wird weiter vorausgesetzt, daß die zu messenden Drehgeschwindigkeiten in zweiter Näherung klein gegen die Rotationsgeschwindigkeit sind, also

$$(II) \quad \Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, |\Omega_1 \Omega_2| \ll \omega^2 \quad (4.21)$$

ist. Die Schwingungs-Differentialgleichung (4.15) vereinfacht sich weiter, wenn bei einem Schwinger nach (4.19) die ersten Näherungen

$$(III) \quad |\Omega_3| \ll 2 \omega; \quad |\dot{\Omega}_2| \ll 2 \omega |\Omega_1|; \quad |\dot{\Omega}_1| \ll 2 \omega |\Omega_2| \quad (4.22)$$

erfüllt sind. Die erste der Voraussetzungen (III) heißt, daß die Komponente des Drehvektors in Richtung der Rotationsachse gegen die Rotation zu vernachlässigen sein muß. Die beiden anderen Bedingungen sind notwendig, da eine Winkelbeschleunigung um eine Richtung senkrecht zur Rotationsachse das gleiche Signal verursacht wie eine Winkelgeschwindigkeit senkrecht zu

beiden Richtungen vom  $1/2\omega$ -fachen Betrag. Mit den obigen Näherungen lautet die Schwingungs-Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} + 2\beta\dot{\vartheta} + \left[ \omega_0^2 + \frac{C-B}{A}(\omega^2 + 2\omega\Omega_3) \right] \vartheta = \frac{A-B+C}{A} \omega (\Omega_1 \sin \omega t + \Omega_2 \cos \omega t). \quad (4.23)$$

Die Eigenfrequenz  $\omega_0$  werde so gewählt, daß bei der vorgegebenen Betriebsfrequenz  $\omega = \omega_R$

$$\omega_0 + \frac{C-B}{A} \omega_R^2 = \omega_R^2 \quad (4.24)$$

ist. Es wird also eine Fesselung mit dem Richtfaktor

$$D = (A + B - C) \omega_R^2 \quad (4.25)$$

vorgesehen. Für quasistationäre Drehungen  $\Omega_3$  läßt sich die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (4.23) in bekannter Weise integrieren, wenn sich  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  nur im Rahmen der Näherungen (III) ändern. Dann ergibt sich

$$\vartheta = C_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_*^2 - \beta^2} t - \gamma_0) + \frac{(A - B + C) \omega}{A \sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} [\Omega_1 \sin(\omega t - \varphi) + \Omega_2 \cos(\omega t - \varphi)] \quad (4.26)$$

und

$$\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_*^2 - \omega^2}. \quad (4.27)$$

Die Konstanten  $C_0$  und  $\gamma_0$  werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die dynamische Eigenfrequenz  $\omega_*$  ist nach (4.23) bei einer Fesselung gemäß (4.24) für  $\omega = \omega_R$

$$\omega_*^2 = \omega_R^2 + \frac{C-B}{A} 2\omega_R \Omega_3. \quad (4.28)$$

Der drehungsabhängige Summand könnte auf Grund der ersten der Voraussetzungen (III) vernachlässigt werden, wenn er nicht bei der Differenzbildung im Nenner von (4.26) gerade übrig bliebe. Für einen Schwinger mit  $A \approx C - B$  ergibt sich nach Beendigung des Einschwingvorgangs ein Ausschlagwinkel

$$\vartheta_{\text{stat}} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_3^2 + \beta^2}} [\Omega_1 \sin(\omega_R t - \varphi) + \Omega_2 \cos(\omega_R t - \varphi)] \quad (4.29)$$

und ein Phasenwinkel

$$\varphi \approx \arctan \frac{\beta}{\Omega_3}. \quad (4.30)$$

Die Glieder mit  $\Omega_3$  sind daher nur zu vernachlässigen, wenn

$$(IV) \quad |\Omega_3| \ll \beta \quad (4.31)$$

ist.

Unter den Voraussetzungen (I) bis (IV) lautet die Schwingungs-Differentialgleichung mit der dynamischen Eigenfrequenz

$$\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{C-B}{A} \omega^2} \quad (4.32)$$

des Schwingers, die auf die Rotationsfrequenz  $\omega$  abzustimmen ist,

$$\ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega_*^2 \vartheta = \frac{A-B+C}{A} \omega (\Omega_1 \sin \omega t + \Omega_2 \cos \omega t). \quad (4.33)$$

Ihr vollständiges Integral wird

$$\begin{aligned} \vartheta = & C_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t - \gamma_0) + \\ & + \frac{A-B+C}{2A\beta} [\Omega_2 \sin \omega t - \Omega_1 \cos \omega t], \end{aligned} \quad (4.34)$$

wobei  $A - B + C \approx 2A$  ist.

Gleichung (4.34) zeigt, daß der Dreh-Schwingkreis gleichzeitig beide Komponenten des Drehvektors in der Rotationsebene durch die Schwingungsamplituden an zwei um  $90^\circ$  versetzten Stellen des Rotorumlaufs mißt. Hat der Drehvektor in der Rotationsebene beispielsweise nur die Komponente  $\Omega_1$ , so hat das erregende Moment sein Maximum, wenn diese Komponente senkrecht auf der Schwingerachse steht. Da der Schwinger in seiner Resonanzfrequenz angeregt wird, ist die Amplitude des Schwingerausschlags gegen die Erregungsamplitude um  $90^\circ$  phasenverschoben. Der Momentanwert des Ausschlags zeigt jeweils die Komponente des Drehvektors in Richtung der Schwingerachse an.

Die Rotationsfrequenz  $\omega$  tritt in Gleichung (4.34) lediglich als Periode der Schwingerauslenkung auf, deren Amplitude nicht von  $\omega$  abhängt. Da der größte Teil der Rückstellkraft von der Zentrifugalkraft aufgebracht wird, die quadratisch mit der Rotationsfrequenz ansteigt, ist die Abstimmung auch bei schwacher Dämpfung nicht kritisch. Daher darf die Rotationsfrequenz sich in gewissen Grenzen ändern, und der Richtfaktor der zusätzlichen Fesselung darf in Anbetracht des kleinen Anteils an der gesamten Rückstellkraft etwas schwanken. Für die dynamische Eigenfrequenz des Schwingers gilt nach (4.32)

$$\omega_*^2 = \omega_0^2 + \frac{C-B}{A} \omega^2. \quad (4.35)$$

Sie ist auf eine bestimmte Rotationsfrequenz  $\omega_R$  abgestimmt. Also ist

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 + \frac{C-B}{A} \omega_R^2. \quad (4.36)$$

Subtrahiert man Gleichung (4.36) von (4.35), so ergibt sich

$$\omega_*^2 - \omega_R^2 = \frac{C - B}{A} (\omega^2 - \omega_R^2). \quad (4.37)$$

Wenn auf beiden Seiten von (4.37)  $\omega^2$  subtrahiert wird, liefert eine elementare Umformung

$$\frac{\omega_*^2 - \omega^2}{\omega_R^2 - \omega^2} = \frac{A + B - C}{A}, \quad (4.38)$$

wofür sich unter Berücksichtigung von (4.25)

$$\frac{\omega_*^2 - \omega^2}{\omega_R^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_R^2} \quad (4.39)$$

schreiben läßt. Quantitative Rechnungen nach Gleichung (4.38) ergeben, daß ein Verhältnis von 0,4 % leicht realisierbar ist. Weicht dann die Rotationsfrequenz des Kreisel von der Frequenz 50 Hz, auf die abgestimmt wurde, um 2 Hz ab, so beträgt die Abweichung von der Eigenfrequenz des Schwingers nach obiger Rechnung nur 0,008 Hz, da die Eigenfrequenz der Rotationsfrequenz gefolgt ist.

Die Differentialgleichung (4.15) wurde dadurch auf die integrierbare Form (4.33) reduziert, daß den Drehungen und Drehbeschleunigungen Beschränkungen auferlegt wurden. Speziell im Hinblick auf diese Beschränkungen wird die Theorie des Dreh-Schwingkreises im nächsten Abschnitt mit dem gefesselten Kreisel und dem Stimmgabel-Wendezeiger verglichen.

### 4.3. Vergleich mit anderen Wendezeigern

Die Anzeige eines Wendezeigers muß eine umkehrbar eindeutige Funktion der zu messenden Komponente des Drehvektors sein. Der störende Einfluß, den andere Komponenten und ihre zeitlichen Ableitungen auf die Anzeige des gefesselten Kreises, des Stimmgabel-Wendezeigers und des Dreh-Schwingkreises haben, wird in diesem Abschnitt behandelt. Die Theorie der beiden erstgenannten Wendezeiger wird vorausgesetzt, wobei auf [1] verwiesen wird.

Die Differentialgleichung für den gefesselten Kreisel ist in [1, Kapitel 13] unter Beschränkung auf langsame Drehungen abgeleitet. Ohne diese Voraussetzung ergibt sich mit den bisher in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen<sup>1)</sup> für kleine Ausschlagwinkel  $\vartheta$ :

Gefesselter Kreisel:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + 2\beta\dot{\vartheta} + \left[ \omega_0^2 + \frac{B-C}{A} (\Omega_2^2 - \Omega_3^2) + \frac{B}{A} \omega \Omega_3 \right] \vartheta + \\ + \frac{B-C}{A} \Omega_2 \Omega_3 \vartheta^2 = -\frac{C}{A} \omega \Omega_2 + \frac{B}{A} \Omega_2 \Omega_3 - \dot{\Omega}_1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

<sup>1)</sup> Siehe Seite 126.

Für den Stimmgabel-Wendezeiger wird Gleichung (77) aus [1, Kapitel 13], bei deren Herleitung lediglich von 2. Ordnung kleine Amplituden der Zinkenschwingungen vorausgesetzt worden sind, übernommen.

Es ist

Stimmgabel:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \sin \omega t\right) \ddot{\vartheta} + \left(2\beta + \omega \frac{C_1}{C_0} \cos \omega t\right) \dot{\vartheta} + \left[\omega^2 - \frac{A-B}{C_0} (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)\right] \vartheta = \\ = -\Omega_3 \omega \frac{C_1}{C_0} \cos \omega t - \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \sin \omega t\right) \dot{\Omega}_3 + \\ + \frac{A_0 - B}{C_0} \Omega_1 \Omega_2 + \frac{A_1}{C_0} \Omega_1 \Omega_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.41)$$

mit

$$C = C_0 + C_1 \sin \omega t; \quad B = B_0; \quad A = A_0 + A_1 \sin \omega t. \quad (4.42)$$

Zwei Trägheitsmomente der Stimmgabel ändern sich periodisch mit der Amplitude  $A_1$  bzw.  $C_1$ , während ihr Wert im zeitlichen Mittel  $A_0$  und  $C_0$  ist. Es wurde angenommen, daß die Torsionsfrequenz des Stimmgabelschaftes auf die Zinkenfrequenz  $\omega$  abgestimmt ist. Auch die dynamische Eigenfrequenz des Schwingers im Dreh-Schwingkreisel wird mit der Rotationsfrequenz in Übereinstimmung gebracht. Dann ist nach Gleichung (4.15) für kleine Ausschlagwinkel (Voraussetzung (I)):

Dreh-Schwingkreisel:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \left\{\omega^2 + \frac{C-B}{A} [2\omega \Omega_3 + \Omega_3^2 - (\Omega_2 \cos \omega t + \Omega_1 \sin \omega t)^2]\right\} \vartheta = \\ = \left[\frac{A-B+C}{A} \Omega_1 \omega + \frac{C-B}{A} \Omega_1 \Omega_3 + \dot{\Omega}_2\right] \sin \omega t + \\ + \left[\frac{A-B+C}{A} \Omega_2 \omega + \frac{C-B}{A} \Omega_2 \Omega_3 - \dot{\Omega}_1\right] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Der gefesselte Kreisel mißt die Komponente  $\Omega_2$ , der Stimmgabel-Wendezeiger  $\Omega_3$  und der Dreh-Schwingkreisel  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ .

Die gyroskopischen Bauelemente der Wendezeiger sind üblicherweise so gestaltet, daß

$$\text{Gefesselter Kreisel:} \quad A \approx B \approx C, \quad (4.44)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad A \approx B, \quad (4.45)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreisel:} \quad A \approx C - B \quad (4.46)$$

ist. In allen praktisch vorkommenden Fällen sind die 2. Näherungen

$$\text{Gefesselter Kreisel:} \quad \Omega_2^2, \Omega_3^2, |\Omega_2 \Omega_3| \ll \omega_0^2, \quad (4.47)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad \Omega_1^2, \Omega_2^2 \ll \omega^2, \quad (4.48)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreisel:} \quad \Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, |\Omega_1 \Omega_2| \ll \omega^2 \quad (4.49)$$

erfüllt. Diese Voraussetzungen unterscheiden sich nur wenig. Da die Betriebsfrequenz der Stimmgabel sehr hoch gewählt werden kann, sind diese Näherungen bei diesem Wendezeiger am besten zu erfüllen. Um konstante Koeffizienten zu erhalten, muß jedoch die Amplitude der Zinkenschwingungen in erster Näherung klein gegen den mittleren Abstand des Zinkenschwerpunkts von der Schaftachse sein. Die zusätzliche Voraussetzung lautet daher

$$\text{Stimmgabel:} \quad C_1 \ll C_0. \quad (4.50)$$

Damit die Differentialgleichungen geschlossen integrierbar werden, müssen außerdem die ersten Näherungen

$$\text{Gefesselter Kreis:} \quad |\Omega_3|, \left| \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega_2} \right| \ll \omega; \quad |\Omega_3| \ll \frac{\omega_0^2}{\omega}, \quad (4.51)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad \left| \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_3} \right|, \left| \frac{\dot{\Omega}_3}{\Omega_3} \right| \ll \omega; \quad \frac{\omega}{2\beta} \frac{C_1}{C_0} \ll 1, \quad (4.52)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreis:} \quad |\Omega_3|, \left| \frac{\dot{\Omega}_2}{\Omega_1} \right|, \left| \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega_2} \right| \ll 2\omega; \quad |\Omega_3| \ll \beta \quad (4.53)$$

erfüllt sein. Diese Voraussetzungen werden anschaulicher, wenn angenommen wird, daß alle drei Komponenten der Drehgeschwindigkeit von gleicher Größenordnung sind. Wenn  $\Omega_r \approx \Omega$  ist, lauten die Bedingungen (4.50) bis (4.53)

$$\text{Gefesselter Kreis:} \quad |\Omega|, \left| \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right| \ll \omega; \quad |\Omega| \ll \frac{\omega_0^2}{\omega}, \quad (4.54)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad |\Omega|, \left| \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right| \ll \omega; \quad C_1 \ll C_0; \quad |\Omega| \ll \omega \ll 2\beta \frac{C_0}{C_1}, \quad (4.55)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreis:} \quad |\Omega|, \left| \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right| \ll 2\omega; \quad |\Omega| \ll \beta. \quad (4.56)$$

Mit diesen Näherungen reduzieren sich die Differentialgleichungen zu den gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\text{Gefesselter Kreis:} \quad \ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = -\omega \Omega_2, \quad (4.57)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad \ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = -\frac{C_1}{C_0} \omega \Omega_3 \cos \omega t, \quad (4.58)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreis:} \quad \ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 2\omega (\Omega_1 \sin \omega t + \Omega_2 \cos \omega t), \quad (4.59)$$

die sich in bekannter Weise integrieren lassen. Nach Beendigung des Einschwingvorgangs ist

$$\text{Gefesselter Kreis:} \quad \vartheta = -\frac{\omega}{\omega_0^2} \Omega_2, \quad (4.60)$$

$$\text{Stimmgabel:} \quad \vartheta = -\frac{1}{2\beta} \frac{C_1}{C_0} \Omega_3 \sin \omega t, \quad (4.61)$$

$$\text{Dreh-Schwingkreis:} \quad \vartheta = -\frac{1}{\beta}(\Omega_1 \cos \omega t - \Omega_2 \sin \omega t). \quad (4.62)$$

Die ersten Teile der Bedingungen (4.54) bis (4.56) sind fast völlig identisch. Wenn  $\dot{\Omega}$  konstant ist, folgt aus  $\dot{\Omega}/\Omega \ll \omega$  für die Änderung  $\Delta\Omega$  in der Zeit  $\Delta t = T$

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega T} \ll \frac{2\pi}{T}. \quad (4.63)$$

Danach muß die relative Änderung der Drehgeschwindigkeit während der Periodendauer  $T$  eines Rotorumschlags oder einer Zinkenschwingung klein gegen  $2\pi$  sein. In ähnlicher Weise folgt aus  $\Omega \ll \omega$  für konstantes  $\Omega$ , daß der betrachtete Wendezeiger während einer Periode nur einen kleinen Teil einer vollen Drehung im Inertialsystem ausführen darf. Durch seine hohe Betriebsfrequenz besitzt der Stimmgabel-Wendezeiger hier einen gewissen Vorteil. Durch den zweiten Teil der Bedingungen wird jedoch seine Übertragungsfunktion, die Eingangs- und Ausgangsgröße miteinander verknüpft, wesentlich stärker beschränkt als für die beiden Kreisel. Gefesselter Kreisel und Dreh-Schwingkreis unterscheiden sich auch hierin nicht: beim Dreh-Schwingkreis läßt sich die Übertragungsfunktion durch Entdämpfung ebensowenig vergrößern wie beim gefesselten Kreisel durch extrem schwache Fesselung, ohne dadurch die obere Grenze der zulässigen Drehgeschwindigkeiten herabzusetzen. Außerdem vergrößert sich die Einstellzeit durch diese Maßnahmen bei beiden Kreiselarten. Wenn der gefesselte Kreisel im aperiodischen Grenzfall ( $\beta = \omega_0$ ) arbeitet, ist seine Übertragungsfunktion bei gleicher Einstellzeit zwar größer solange  $\omega_0 < \omega$  ist, dann liegt aber beim Dreh-Schwingkreis die obere Grenze der zulässigen Drehgeschwindigkeiten entsprechend höher. Die Betriebsfrequenz  $\omega$  tritt nur in der Übertragungsfunktion des gefesselten Kreisels auf; sie muß auch beim Stimmgabel-Wendezeiger sehr konstant sein, da dessen Abstimmung sehr kritisch ist.

#### 4.4. Der Einfluß von Beschleunigungen

Idealisiert betrachtet sind die drei zur Diskussion stehenden Wendezeiger gegen Erd- und Translationsbeschleunigungen unempfindlich. Weder der Rotor eines gefesselten Kreisels noch der Schwinger eines Dreh-Schwingkreises kann jedoch beliebig genau in seinem Schwerpunkt gelagert werden. Dies ist schon deshalb nicht möglich, weil sich der Schwerpunkt durch Temperatur- und Beschleunigungseinflüsse verschieben kann. Der Einfluß von Beschleunigungen auf die Anzeige des Stimmgabel-Wendezeigers ist zwar theoretisch und experimentell untersucht worden [19], läßt sich jedoch nicht durch einfache Gleichungen beschreiben, die mit denen der beiden Kreisel vergleichbar sind. Die Ursache des Beschleunigungseinflusses ist in einer Ungleichheit der Zinkenmassen und einer ungleichmäßigen Verlagerung des Zinkenschwerpunkts durch die Beschleunigung zu sehen.

Um die durch Beschleunigungen verursachte Fehlanzeige für den Dreh-Schwingkreis zu berechnen, wird angenommen, daß die Achse des Schwingers nicht durch den Schwerpunkt geht, sondern daß dessen Lage relativ zur



Schwingerachse durch den Ortsvektor  $\vec{r}$  beschrieben wird. Dann wird um die Achse die  $x$ -Komponente des Moments

$$\mathfrak{M} = -m_s \vec{r} \times \mathfrak{g} \quad (4.64)$$

wirksam, wo  $m_s$  die Schwingermasse ist. Die Beschleunigung  $\mathfrak{g}$  läßt sich zerlegen in eine Komponente in Richtung der Rotationsachse, die nur eine statische Schwingerauslenkung bewirken kann, und eine Komponente  $g$ , die in der Rotationsebene mit der Kreisfrequenz  $\omega$  umläuft. Greift diese Komponente am Schwerpunkt mit einem Hebelarm  $r$  an, so erzeugt sie um die Schwingerachse das Moment

$$|M_x| = m_s r g \sin \omega t. \quad (4.65)$$

Wird dieses Moment mit dem nach Gleichung (4.33) von Drehgeschwindigkeiten erzeugten Moment gleichgesetzt, so ergibt sich

$$(A - B + C) \omega \Omega_g = m_s r g. \quad (4.66)$$

Für einen Schwinger mit  $A \approx C - B$  stimmt die unter Beschleunigungseinfluß vom Dreh-Schwingkreisels angezeigte Driftgeschwindigkeit

$$\Omega_g = \frac{1}{2} \frac{m_s r g}{A \omega} \quad (4.67)$$

mit der entsprechenden Gleichung für den gefesselten Kreisels [18, p. 66] bis auf den Faktor  $1/2$  überein. Die Driftgeschwindigkeit verringert sich bei beiden Kreiseln, wenn bei geringem Gewicht ein möglichst großes Trägheitsmoment des Schwingers bzw. des Rotors und hohe Drehzahlen angestrebt werden.

## 5. Technische Ausführungsmöglichkeiten

Die Aufgaben bei der technischen Ausführung eines Dreh-Schwingkreisels lassen sich unterteilen in den Kreiselantrieb, die Schwingerlagerung, die Formgebung des Schwingers sowie die Signalabnahme und -verarbeitung.

Der Kreiselantrieb ist kein grundsätzliches Problem. Im Hinblick auf Gleichlauf und Drehzahlkonstanz empfehlen sich Hysteres-Synchronmotoren wie sie in handelsüblichen Tonbandgeräten verwendet werden, wobei auf geringes Axialspiel und Geräuscharm Wert zu legen ist. Richtlinien zur Formgebung des Schwingers haben sich bereits aus der Theorie des Dreh-Schwingkreisels ergeben. Ein langgestreckter Zylinder, der um einen Durchmesser durch seinen Schwerpunkt schwingen kann und eventuell Zusatzmassen an seinen Enden trägt, besitzt bei ausreichender Steifigkeit und geringer Masse ein großes Trägheitsmoment um die Schwingerachse und genügt der Vorschrift (4.19),  $A \approx C - B$ , recht gut. Tariergewichte müssen in beiden Richtungen senkrecht zur Schwingerachse verschiebbar sein.

Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten für die übrigen Aufgaben werden im folgenden diskutiert. In experimentellen Prüfungen war ein Dreh-Schwingkreisels mit Blattfederlagerung und optischer Signalabtastung erfolgreich.

### 5.1. Schwingerlagerung

Die Lager des Schwingers eines Dreh-Schwingkreises müssen nur kleine Ausschlagwinkel zulassen; sie sind hierin den Lagern eines Waagebalkens verwandt. Im Unterschied zur Waage läßt sich beim Kreisel die Richtung der Schwerkraft nicht festlegen, da der Schwinger zu einem System gehört, das um eine beliebig im Raum orientierte Achse rotiert. Radialkräfte wechselnder Richtung müssen auch von Uhrenlagern aufgenommen werden, die den Achsen ganze Umdrehungen ermöglichen. Dabei tritt äußere Reibung auf, die in Meßgeräten stets eine Fehlerquelle bildet. Darum wird im folgenden nach einem besonderen Lagertyp für die Gegebenheiten des Dreh-Schwingkreises gesucht, wobei zwei Lagerarten in Betracht gezogen werden.

#### 5.1.1. Achslager

Zunächst werden Lager betrachtet, bei denen der Schwinger vom Rotor physisch getrennt ist. Solche Lager bestehen aus einer Achse mit dem Krümmungsradius  $R_p$ , die sich in einer Schale mit dem Radius  $R_b$  bewegt. Der in Abb. 4 gezeichnete Achsenquerschnitt kann auch der Spitze eines Spitzenlagers angehören und sich in einer entsprechenden Pfanne bewegen. In normalen Gleitlagern ist  $R_p/R_b \approx 1$ , während in Schneidenlagern  $R_p/R_b$  gegen Null geht.

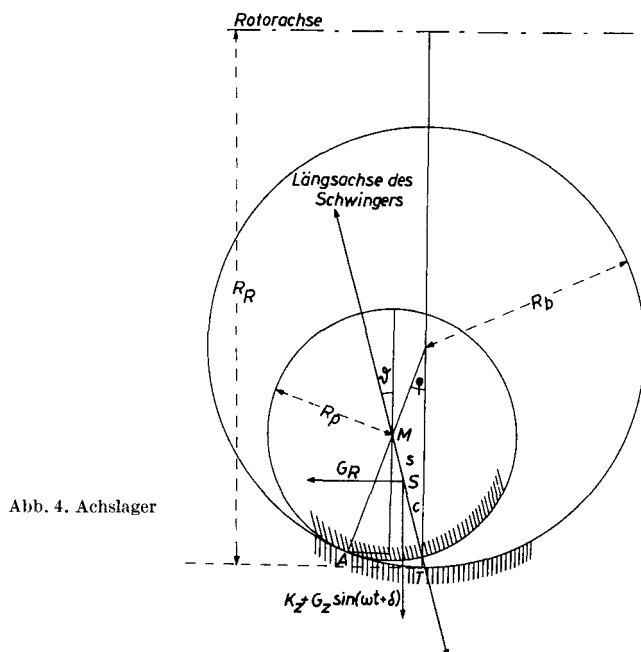


Abb. 4. Achslager

Da sich die Richtung der Schwerkraft nicht festlegen läßt und sich ihre Komponente in der Rotationsebene in einem rotorfesten Bezugssystem periodisch ändert, rollt oder fällt die Schwingerachse in unkontrollierbarer Weise im

Lager hin und her, wenn sie nicht durch eine Andruckskraft fixiert wird. Wird das Lager, wie in Abb. 4, exzentrisch zur Rotorachse angebracht, so drückt die Zentrifugalkraft  $K_z$  die Schwingerachse in die Lagerschale. In Richtung von  $K_z$  greift ferner die periodische Komponente  $G_z \sin(\omega t + \delta)$  der Schwerkraft am Schwingerschwerpunkt  $S$  an und senkrecht dazu die Komponente  $G_R$ . Es ist offensichtlich, daß  $K_z > G_R$  gewählt werden muß, um eine eindeutige Ruhelage des Schwingers sicherzustellen.

Erzwingen die Coriolisschen Kräfte Drehbewegungen des Schwingers, so rollt die Achse zunächst im Lager ab, bis die Zentrifugalkraft  $K_z$  mit der Tangente an den Umfang der Lagerschale im Aufpunkt  $A$  den Winkel  $\varphi = \arctan \mu$  ( $\mu$  = Reibungskoeffizient) bildet. Dann tritt Gleitung ein. Bei größeren Ausschlagwinkeln  $\vartheta$  tritt dieser Fall mehrmals auf, was zu Kippschwingungen führt. Um definierte Verhältnisse zu schaffen, muß dafür gesorgt werden, daß entweder stets  $\tan \varphi < \mu$  ist, so daß die Achse niemals gleitet, sondern rollt, oder die Beziehung zwischen  $\vartheta$  und  $\varphi$  muß durch geeignete Wahl der Radien so festgelegt werden, daß die Achse bereits bei der kleinsten meßbaren Drehgeschwindigkeit gleitet. Reibung verursacht stets Nichtlinearitäten, aber bei reiner Gleitlagerung ändert die momentane Drehachse ihre Lage nicht, während sie bei Rollagerung naturgemäß in Abhängigkeit vom Ausschlag wandert.

Wegen der wesentlich geringeren Reibung in Rollagern ist es sinnvoll, theoretisch zu untersuchen, ob die Wanderung der momentanen Drehachse tatsächlich zu nennenswerten Fehlern führen muß. Dabei wird sich zeigen, daß sich diese Fehler in vorgegebenen Grenzen halten lassen, wenn das Lager richtig dimensioniert und der Schwingerschwerpunkt geeignet gelegt wird. Es besteht ferner die Möglichkeit, den Schwinger durch die Festlegung des Schwerpunkts rein dynamisch abzustimmen und damit von der Betriebsfrequenz völlig unabhängig zu werden. Das zur Abstimmung erforderliche, zusätzliche Richtmoment wird dabei vom Moment der im Schwerpunkt angreifenden Zentrifugalkraft um die momentane Drehachse geliefert.

Die Berechnung der quantitativen Zusammenhänge in Schwingerlagern, deren momentane Drehachse nicht oder nicht immer durch den Schwerpunkt geht, wird für Achslager nach Art der Abb. 4 durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Theorie lassen sich in spezialisierter Form auch auf andere Lagertypen anwenden.

Nach Abb. 4 ist die Bogenlänge zwischen den Berührungspunkten  $T$  und  $A$

$$\varphi R_b = (\vartheta + \varphi) R_p, \quad (5.1)$$

wenn  $T$  der Aufpunkt in Ruhelage des Schwingers ( $\vartheta = \varphi = 0$ ) ist. Daraus ergibt sich

$$\varphi = \frac{1}{R_b/R_p - 1} \vartheta. \quad (5.2)$$

Zunächst sind die Momente um die momentane Drehachse  $A$  zu berechnen. In Ruhelage liege der Schwerpunkt  $S$  aus Symmetriegründen so, daß die Zentrifugalkraft kein Moment um den Punkt  $A = T$  hat. Das Moment der

am Schwerpunkt angreifenden Kräfte ist nach Abb. 4 unter Berücksichtigung der Coriolis-Kräfte

$$M_k = - [K_z + G_z \sin (\omega t + \delta)] [s \sin \vartheta + R_p \sin \varphi] + \\ + G_R [R_p \cos \varphi - s \cos \vartheta] + 2 \omega m [(R_R - R_b) + \\ + (R_b - R_p) \cos \varphi + s \cos \vartheta] [s \cos \vartheta - R_p \cos \varphi] \Omega \sin \omega t . \quad (5.3)$$

Dabei wurde die Drehgeschwindigkeitskomponente in der Rotationsebene mit  $\Omega$  bezeichnet. Die Zentrifugalkraft  $K_z$  ist durch die Gleichung

$$K_z = m \omega^2 [(R_R - R_b) + (R_b - R_p) \cos \varphi + s \cos \vartheta] \quad (5.4)$$

gegeben. Unter Beschränkung auf kleine  $\vartheta$  und  $\varphi$  und Berücksichtigung von (5.2) wird aus (5.3)

$$M_k = - [m \omega^2 (R_R - c) + G_z \sin (\omega t + \delta)] a \vartheta + G_R c - \\ - 2 \omega m (R_R - c) c \Omega \sin \omega t , \quad (5.5)$$

wobei

$$R_p - s = c \quad \text{und} \quad s + \frac{R_p}{R_b/R_p - 1} = a \quad (5.6)$$

gesetzt wurde.

Das um den Schwerpunkt wirksame Moment ergibt sich aus der Kreiselgleichung und ist mit den Vernachlässigungen (I) ... (IV) der Differentialgleichung (4.33) zu entnehmen. Danach ist

$$M_x = (A - B + C) \omega \Omega \sin \omega t - (C - B) \omega^2 \vartheta . \quad (5.7)$$

Das Trägheitsmoment  $A_A$  um die momentane Drehachse berechnet sich aus dem Trägheitsmoment  $A$  um den Schwerpunkt nach dem Steinerschen Satz. Mit der Schwinger Masse  $m_s$  wird

$$A_A = A + m_s [(s \sin \vartheta + R_p \sin \varphi)^2 + (R_p \cos \varphi - s \cos \vartheta)^2] . \quad (5.8)$$

Für kleine  $\vartheta$  und  $\varphi$  wird hieraus nach elementarer Rechnung unter Benutzung von (5.6)

$$A_A = A + m_s c^2 . \quad (5.9)$$

Die Schwingungs-Differentialgleichung

$$A_A \ddot{\vartheta} + \varrho \dot{\vartheta} + D \vartheta = M_x + M_k , \quad (5.10)$$

mit den Bezeichnungen der Gleichung (4.13) lautet nach Einsetzen von (5.6) und (5.7)

$$A_A \ddot{\vartheta} + \varrho \dot{\vartheta} + \{D + [m_s \omega^2 (R_R - c) + G_z \sin (\omega t + \delta)] a + (C - B) \omega^2\} \vartheta \\ = [(A - B + C) - 2 m_s (R_R - c) c] \omega \Omega \sin \omega t + G_R c . \quad (5.11)$$

Die Konstante  $a$  verschwindet, wenn  $s$  einen nach Gleichung (5.6) geeigneten, negativen Wert hat. Dann wird der Koeffizient von  $\vartheta$  konstant und Gleichung (5.11) bequem integrierbar.

Weil das Moment  $(C - B) \omega^2 \vartheta$  der Zentrifugalkraft zur Abstimmung des Schwingers auf die Rotationsfrequenz  $\omega$  wegen  $A > C - B$  allein nicht ausreicht, wurde zusätzlich ein elastisches Richtmoment  $D \vartheta$  eingeführt. Dieses Richtmoment läßt sich bei exzentrischem Schwingerschwerpunkt durch das Moment  $m_s \omega^2 (R_R - c) a \vartheta$  in Gleichung (5.11) ersetzen. Dazu muß  $a$  von Null verschieden sein. Da der Koeffizient von  $\vartheta$  dann nicht konstant ist, wird zunächst die Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = K_1 \omega \Omega \sin \omega t + K_2 + K_3 \quad (5.12)$$

betrachtet, wo

$$K_1 = \frac{1}{A_A} [(A - B + C) - 2 m_s (R_R - c) c], \quad (5.13)$$

$$K_2 = \frac{G_R}{A_A} c \quad (5.14)$$

ist, und  $K_3$  eine noch zu bestimmende, nicht periodische Größe ist. Die geometrischen Abmessungen seien so gewählt, daß die später für die Abstimmung notwendige Bedingung

$$\omega^2 A_A = D + \omega^2 [m_s (R_R - c) a + (C - B)] \quad (5.15)$$

erfüllt ist. Integration von (5.12) liefert im eingeschwungenen Zustand

$$\vartheta = \frac{K_2 + K_3}{\omega^2} + \frac{K_1}{2\beta} \Omega \cos \omega t. \quad (5.16)$$

Wir nehmen an, daß  $\vartheta$  auch die Lösung unserer Differentialgleichung (5.11) ist. Wenn diese Annahme richtig ist, muß sich erweisen, daß der in (5.12) nicht berücksichtigte Anteil des  $\vartheta$ -proportionalen Moments entweder eine von  $\omega$  stark verschiedene Frequenz hat oder hinreichend klein gehalten werden kann. Wird in diesem bisher nicht berücksichtigten Glied von (5.11) der Wert von  $\vartheta$  aus Gleichung (5.16) eingesetzt, so ergibt sich mit der Abstimmbedingung (5.15):

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + 2\beta \dot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = K_1 \omega \Omega \sin \omega t + \frac{G_R}{A_A} c - \\ - \frac{G_z a}{A_A} \sin (\omega t + \delta) \left[ \frac{K_2 + K_3}{\omega^2} + \frac{K_1}{2\beta} \Omega \cos \omega t \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Da

$$\sin (\omega t + \delta) \cos \omega t = \frac{1}{2} [\sin (2\omega t + \delta) + \sin \delta] \quad (5.18)$$

ist, ergibt sich eine Erregung mit der doppelten Eigenfrequenz, die vom Schwinger herausgefiltert wird, und eine mit der Frequenz Null, die jetzt mit der Winkelbeschleunigung  $K_3$  identifiziert wird und damit in der Differentialgleichung (5.12) bereits berücksichtigt ist. Es wird also

$$K_3 = - \frac{G_z K_1 a}{4\beta A_A} \Omega \sin \delta \quad (5.19)$$

gesetzt. Übrig bleibt ein Störglied, das gegen das periodische Moment der Coriolis-Kräfte zu vernachlässigen ist, wenn die Ungleichung

$$|(K_2 + K_3) \frac{G_z a}{\omega^2 A_A} \sin(\omega t + \delta)| \ll |K_1 \omega \Omega \sin \omega t| \quad (5.20)$$

erfüllt ist. Das Störglied enthält zwei Summanden; einen mit  $K_2 = K_2(G_R)$  und einen mit  $K_3 = K_3(G_z, \Omega)$ . Das erste Störmoment entsteht, wenn die Ruhelage des Schwingers durch  $G_R$  verändert wird. Dadurch erhält die periodische Schwerkraftkomponente  $G_z \sin(\omega t + \delta)$  einen Hebelarm um die momentane Drehachse. Dieser Hebelarm entsteht auch bei gleichzeitigem Auftreten von  $G_z$  und  $\Omega$  durch eine phasenbewertende Gleichrichtung, die durch Gleichung (5.18) beschrieben wird, und gibt Anlaß zu dem zweiten Störanteil. Da  $K_2$  und  $K_3$  voneinander unabhängig sind, müssen beide Summanden in (5.20) einzeln kleiner sein als das Coriolis-Glied. Mit  $G_z, G_R \approx m_s g$ ,  $A = m_s r_a^2$  und  $(A - B + C) = m_s r_c^2$  lauten die Bedingungen hierfür nach elementaren Umformungen unter Berücksichtigung von (5.9), (5.13), (5.14) und (5.19)

$$\frac{a}{(r_a^2 + c^2) |r_c^2/c - 2(R_R - c)|} \ll \frac{\omega^3 \Omega}{g^2}, \quad (5.21)$$

$$\frac{a^2}{(r_a^2 + c^2)^2} \ll \frac{4 \beta \omega^3}{g^2}. \quad (5.22)$$

Die Abstimmbedingung (5.15) wird mit den obigen Abkürzungen zu dem Ausdruck

$$2 r_a^2 - r_c^2 = (R_R - c) a - c^2, \quad (5.23)$$

wobei ein zusätzlicher Richtfaktor  $D$  nicht notwendig ist. Dabei ist

$$a = s + \frac{R_p}{R_b/R_p - 1}, \quad (5.6)$$

während die Bedeutung der übrigen Größen in diesen Gleichungen der Abb. 4 zu entnehmen ist. Unter den Bedingungen (5.21) bis (5.23) ist die Gleichung (5.12) mit der zu integrierenden Schwingungs-Differentialgleichung (5.11) identisch. Daher wird die Lösung dieser Gleichung durch (5.16), also durch

$$\vartheta = \frac{K_2 + K_3}{\omega^2} + \frac{r_c^2 - 2(R_R - c)c}{2\beta(r_a^2 + c^2)} \Omega \cos \omega t \quad (5.24)$$

beschrieben.

Im Zähler des periodischen Teils dieser Gleichung stehen zwei Summanden mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das von der Massenverteilung um den Schwerpunkt bestimmte Moment arbeitet gegen das Moment, das durch Coriolis-Beschleunigung der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse erzeugt wird. Der Schwinger läßt sich so dimensionieren, daß der zweite Anteil überwiegt. Ein Beispiel dafür ist ein Schwinger, der nur aus seiner Achse besteht, also aus einem Zylinder oder Halbzylinder, der in einem Lager nach Abb. 4

abrollt. Dann läßt sich die Bedingung (5.21) jedoch nur bei hohen Drehzahlen in befriedigender Weise erfüllen. Soll das erste der beiden Momente überwiegen, so empfiehlt sich ein zylindrischer Schwinger nach Abb. 1, der um eine Achse senkrecht zu seiner Längsrichtung schwingt. Dann lassen sich die Voraussetzungen (5.21) und (5.22) und die Abstimmbedingung (5.23) durch die verschiedensten Lagerformen, vom Schneidenlager mit kleinem  $R_p$  und großem oder unendlichem  $R_b$  bis zu reinen Gleit- oder Torsionsfederlagern mit fester Drehachse und  $R_p = R_b = 0$ ,  $a = s$ , einhalten. Experimentelle Untersuchungen an einem Rollager, dessen Abmessungen sämtlich von der Größenordnung 1 mm sind, legten den Übergang zum Grenzfall des Schneidenlagers nahe.

### 5.1.2. Federlager

Da die Lagerung des Schwingers nur kleine Ausschlagwinkel zulassen soll, müssen Schwinger und Rotor nicht physisch getrennt werden. Das mechanische Verbindungsglied muß von den Drehbewegungen des Schwingers elastisch zu deformieren sein, soll dem Schwinger jedoch alle übrigen Freiheitsgrade für Bewegungen relativ zum Rotor nehmen. Nach Gleichung (4.39) wird die Abstimmung des Schwingers auf die Rotationsfrequenz mit kleiner werdender Fesselungsfrequenz  $\omega_0$  immer weniger kritisch. Daher sollte der Schwinger, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, so dimensioniert werden, daß seine Hauptträgheitsmomente der Forderung  $A \approx C - B$  möglichst nahekommen, und der Richtfaktor der Federlagerung nur den kleinen, durch (4.25) gegebenen Wert besitzt.

Für die Lagerung des Schwingers durch Torsionsfedern können zunächst Kreuzfedergelenke in Betracht gezogen werden. Die Konstruktion solcher Gelenke bedingt jedoch grundsätzlich eine Verlagerung der momentanen Drehachse in Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel. Für diese Verlagerung sind in [20] Gleichungen angegeben, mit denen ihr Einfluß auf die Anzeige des Dreh-Schwingkreisels in gleicher Weise untersucht wurde, wie dies in Abschnitt 5.1.1 für Rollager geschehen ist. Während die Frequenz des stärksten Störmoments beider Lagerarten doppelt so groß ist wie die Resonanzfrequenz, und daher vom Schwinger herausgefiltert wird, treten auch Störungen gleicher Frequenz auf.

Die Lage der Drehachse im Rotor ist unveränderlich, wenn der Schwinger durch einen zylindrischen Torsionsstab gelagert wird, dessen Durchmesser so groß ist, daß er sich unter Einwirkung von Beschleunigungen nicht verbiegt. Der Richtfaktor solcher Stäbe ist jedoch so groß, daß sich der Schwinger nicht mehr abstimmen läßt, wenn die Bedingung  $A \approx C - B$  auch nur annähernd erfüllt werden soll. Der Querschnitt des Torsionsstabes darf daher nicht zylindrisch sein. Vielmehr sollten im Querschnitt zusammenhängende Bereiche in radialer Richtung eine größere Ausdehnung haben als in tangentialer Richtung, damit das Lager bei großer Biegesteifigkeit eine geringe Torsionssteifigkeit besitzt.

Ein solches Lager zeigt Abb. 5. Es besteht aus zwei Blattfedern, deren längste Mittellinie in der vorgesehenen Schwingerachse liegt und die, auf beiden Seiten

des Schwingers angebracht, gegeneinander um  $90^\circ$  versetzt sind. Jede der beiden Federn besitzt eine große Biegesteifigkeit in einer Richtung. Da diese Richtungen aufeinander senkrecht stehen, haben die Federn eine große Steifigkeit gegen alle Biegemomente.

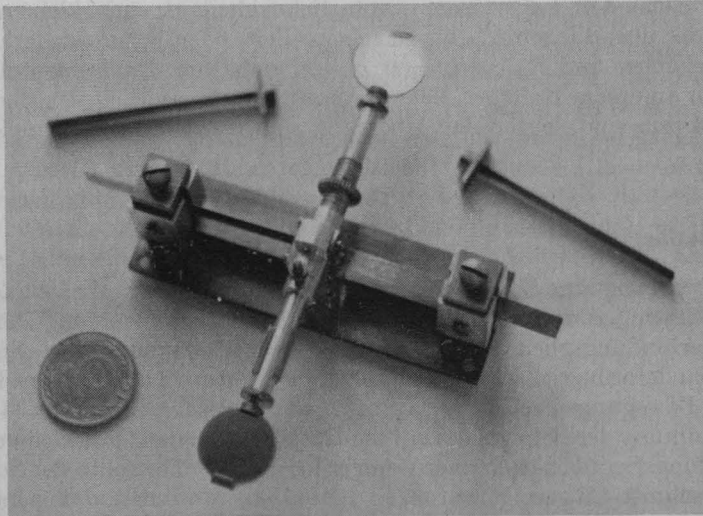


Abb. 5. Schwinger mit Blattfederlagerung

Wird die Torsionssteifigkeit der beiden Blattfedern nach dem hydrodynamischen Gleichnis [21, p. 57] berechnet, so ergibt sich der Richtfaktor

$$D = \frac{2}{3} G \frac{b}{l} d^3, \quad (5.25)$$

wo  $G$  der Schubmodul und  $l$ ,  $b$ ,  $d$  Länge, Breite und Dicke der Blattfedern ist. Dieser Richtfaktor ist mit der Abstimmbedingung (4.25) in Übereinstimmung zu bringen.

Es läßt sich zeigen, daß ein Lager aus zwei gekreuzten Blattfedern isoelastisch ist.

## 5.2. Signalabnahme

Der Dreh-Schwingkreis zeigt Drehbewegungen gegen ein Inertialsystem durch periodische Bewegungen des Schwingers relativ zum Rotor an. Diese Relativbewegung kann durch induktive oder kapazitive Aufnehmer auf bekannte Weise in ein elektrisches Signal umgewandelt werden, das dann vom Rotor auf das Kreiselgehäuse zu übertragen ist, damit es dort der weiteren Verarbeitung oder der Ablesevorrichtung zur Verfügung steht. Für diese Signalübertragung ist von Hamel [12] ein Transformator, bestehend aus zwei zur Rotorachse konzentrischen Zylinderspulen, vorgeschlagen worden, deren eine mit dem Rotor, die andere mit dem Kreiselgehäuse verbunden ist. Die Störungen durch diesen Übertragungskanal werden verringert, wenn das



Signal auf dem Rotor vorverstärkt und durch eine geeignete Modulationsart an den Kanal angepaßt wird. Die hierfür erforderliche Elektronik läßt sich in miniaturisierter Form auf dem Rotor unterbringen und kann über den Signalkanal mit Energie versorgt werden, wenn die Frequenz der Versorgungsspannung nicht in das Signalband fällt. Die Bewegungen des Schwingers im Rotor sind auch relativ zum Kreiselgehäuse induktiv oder optisch zu messen.

Die erste Ausführung eines Dreh-Schwingkreises wurde mit einer optischen Signalabnahme ausgerüstet, da sie keine Rückwirkungen auf den Schwinger hat und ein optischer Übertragungskanal auf einfache Weise gegen äußere Störungen abzuschirmen ist.

Da mit Intensitätsschwankungen der Lichtquelle und Empfindlichkeitsänderungen des Photodetektors gerechnet werden muß, arbeitet die optische Signalabnahme nicht mit Amplituden-, sondern mit Pulsmodulation. Ihr Strahlengang ist in Abb. 6 schematisch dargestellt. Die Umrisse des Rotors sind gestrichelt angedeutet. Drei Spiegel sind am Rotor befestigt, während ein weiterer Spiegel am Ende des Schwingers mitrotiert. Damit der Schwinger gegen die bei der Rotation auftretenden Luftströmungen geschützt ist, bildet der Rotor eine Kammer um den Schwinger. Durch ein Fenster in dieser Kammer wird der Schwingerspiegel beleuchtet. Die übrigen Teile der Abb. 6 sind am Kreiselgehäuse befestigt.

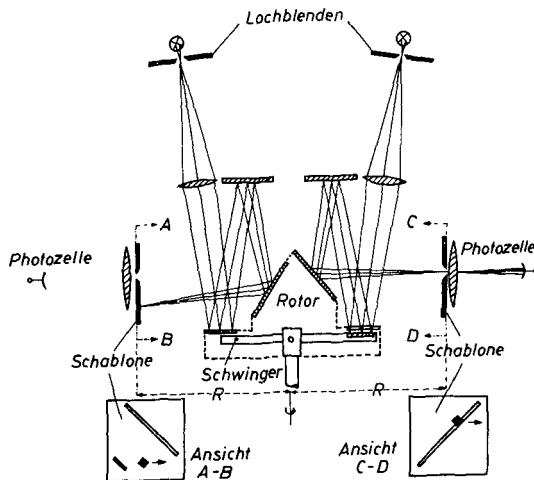


Abb. 6. Optische Signalabnahme

In Abb. 6 befinden sich oben rechts und links zwei Blenden mit quadratischen Löchern, die, von hinten beleuchtet, durch Achromate über mehrere Spiegel auf Schablonen abgebildet werden. Die quadratischen Bildpunkte laufen in den Seitenansichten der Abb. 6 von links nach rechts über die Schablonen, da die Richtung der Lichtstrahlen durch die schrägen Rotorspiegel gedreht wird. Der Bildpunkt des Strahlengangs in der rechten Hälfte von Abb. 6 möge den Schrägschlitz gerade in Schablonenmitte erreichen, wenn der Schwingerspiegel

nicht ausgelenkt ist. In Abhängigkeit von dem Ausschlagwinkel  $\vartheta$  des Schwingerspiegels, der den Lichtstrahl bei der Reflexion um den Winkel  $2\vartheta$  auslenkt, verschiebt sich die Bahn des Bildpunkts um die Strecke

$$a = 2\vartheta L \quad (5.26)$$

parallel zu sich selbst, wobei  $L$  die Länge des Lichtzeigers vom Schwingerspiegel bis zum Bildpunkt ist. Die gleiche Strecke legt der Bildpunkt auf seiner Bahn zurück, bis er von der Schablonenmitte aus den Schrägschlitz erreicht und in der Photozelle hinter der Schablone einen elektrischen Impuls auslöst. Er benötigt für die Strecke  $a$  die Zeit

$$t = \frac{2\vartheta L}{\omega R}, \quad (5.27)$$

wenn die Schablone von der Rotorachse den Abstand  $R$  hat. Später ist zu beachten, daß sich der Rotor in dieser Zeit um den Winkel

$$\alpha = \frac{a}{R} = 2\vartheta \frac{L}{R} \quad (5.28)$$

gedreht hat.

Der Strahlengang der linken Hälfte von Abb. 6 erzeugt über den rotorfesten Spiegel einen Bezugsimpuls, der vor dem eigentlichen Meßimpuls entsteht. Der Abstand der beiden Pulse, der auf elektronischem Wege digital gemessen wird, ist eine lineare Funktion der Schwingeramplitude und damit der zu messenden Drehgeschwindigkeit um eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Achse. Der Nullpunkt der Anzeige ist unterdrückt.

Wenn sich der Pulsabstand bei einer Wanderung der Ruhelage des Schwingers in der eingezeichneten Rotorstellung verkürzt, verlängert er sich um den gleichen Betrag bei der nächsten Messung nach einer Rotordrehung um  $180^\circ$ , da nun der mit dem Schwingerspiegel erzeugte Bildpunkt über die linke Schablone läuft. Durch Mittelung über eine gerade Anzahl von Messungen kompensiert sich daher eine Nullpunktsdrift. Ändert die Rotorachse unter Beschleunigungseinfluß ihre Lage relativ zum Kreiselgehäuse wegen des unvermeidlichen Lagerspiels, so verschieben sich die Bahnen der beiden Bildpunkte in entgegengesetzter Richtung, wobei der Pulsabstand konstant bleibt. Verschiebungen des Rotors in Richtung seiner Achse, die mit der Lage der Bildpunkte auch den Pulsabstand ändern, wurden nicht beobachtet. Ihr Einfluß kann nötigenfalls durch Verwendung von parallelen Lichtbündeln beseitigt werden. Dann wird die Signalübertragung vom Rotor auf das Kreiselgehäuse durch Unvollkommenheiten der Rotorlagerung nur gestört, wenn sich dadurch die Lage der Rotationsebene im Kreiselgehäuse bereits in der kurzen Zeit zwischen Bezugs- und Meßimpuls merklich ändert.

Das Auflösungsvermögen jeder optischen Einrichtung wird durch Beugungserscheinungen bestimmt. Um stets die gleiche Lichtstärke zu haben, ist der Schwingerspiegel voll auszuleuchten, solange auf der Schablone ein scharfer Bildpunkt benötigt wird. Der Schwingerspiegel ist daher Ein- und Austrittspupille des in Abb. 6 skizzierten Strahlengangs. Sein Durchmesser  $D_s$  bestimmt

neben der Wellenlänge  $\lambda$  des verwendeten Lichts die Beugungsfigur in der Bildebene, deren erstes Minimum vom zentralen Maximum durch den Bildwinkel

$$2 \Delta \vartheta \approx \sin (2 \Delta \vartheta) = \frac{\lambda}{D_s} \quad (5.29)$$

getrennt ist.  $\Delta \vartheta$  ist die zugehörige Winkeländerung des Schwingerspiegels. Ihr entspricht nach (5.27) eine Änderung des Pulsabstands um

$$\Delta t = \frac{\lambda}{\omega} \frac{L}{D_s R}. \quad (5.30)$$

In dieser Zeit soll sich auch der Photostrom in der Photozelle aufbauen. Mit den tatsächlichen Daten des beschriebenen Dreh-Schwingkreises:  $\lambda = 6 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$  (Glühlicht);  $D_s = 16 \text{ mm}$ ;  $L = 264 \text{ mm}$ ;  $R = 100 \text{ mm}$  und  $\omega = 2 \pi \cdot 25 \text{ Hz}$  ergibt sich eine Anstiegszeit von  $0,6 \text{ } \mu\text{s}$ . Die Anstiegszeit von Vakuum-Photozellen liegt in dieser Größenordnung.

Mit inkohärentem Glühlicht ergibt sich keine scharfe Beugungsfigur; die Flanke des zentralen Maximums und folglich auch des Meßpulses ist durch die Stochastizität der thermischen Lichterzeugung stark verrauscht. Wird die Zeitmessung an der steilsten Stelle der Pulsflanke ausgelöst, so kann dennoch bei genügender Pulshöhe, die von der Lichtleistung abhängt, ohne weiteres ein Bruchteil  $\zeta = 10 \%$  (relative Triggeregenauigkeit) des Winkelabstands zwischen Minimum und Maximum der zentralen Beugungsfigur aufgelöst werden. Das entspricht nach Gleichung (5.29) einem Schwingerausschlag

$$(\Delta \vartheta)_{\min} = \frac{\lambda}{2 D_s} \zeta. \quad (5.31)$$

Die maximale Schwingeramplitude ist nach (4.62)

$$\vartheta = \frac{\Omega}{\beta}. \quad (5.32)$$

Wenn die Abklingkonstante  $\beta$  gemäß der Definition

$$\Delta \nu := \frac{\beta}{\pi} \quad (5.33)$$

durch die Bandbreite  $\Delta \nu$  des Kreises ersetzt wird, ergibt sich durch Zusammenfassung der Gleichungen (5.31) bis (5.33) für die kleinste meßbare Drehgeschwindigkeit der Ausdruck

$$\Omega_{\min} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_s} \zeta \Delta \nu. \quad (5.34)$$

Fordert man eine Bandbreite von  $10 \text{ Hz}$ , so ist bei  $16 \text{ mm}$  Spiegeldurchmesser die Drehgeschwindigkeit

$$\Omega_{\min} = 6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 12 \text{ }^\circ/\text{h} \quad (5.35)$$

noch gut meßbar. Die Laborausführung wurde nicht gedämpft; daher ist ihre Bandbreite um Größenordnungen kleiner und das Auflösungsvermögen entsprechend höher.

Das Auflösungsvermögen der Signalabnahme des Dreh-Schwingkreises hängt nach Gleichung (5.34) bei gegebener Bandbreite und größtmöglichem Spiegeldurchmesser nur von der relativen Triggergenauigkeit  $\zeta$  ab, die mit dem Verhältnis der Pulshöhe zum Rauschpegel wächst. Die Pulshöhe — oder bei Übersteuerung der Photozelle die Flankensteilheit des Pulses — ist eine Funktion der einfallenden Lichtleistung. Dieser Zusammenhang ist noch nicht näher untersucht, es ist aber wahrscheinlich, daß die Flankensteilheit bei steigender Lichtleistung stärker zunimmt als das Rauschen.

Zur Messung von zwei Drehgeschwindigkeitskomponenten sind zwei Einrichtungen nach Abb. 6 erforderlich, die um die gemeinsame Rotorachse um  $90^\circ$  versetzt sind; für Versuchszwecke genügt jedoch eine Abnahmevorrichtung. Es liegt in der Natur der beschriebenen Signalabnahme, daß die Schwingeramplitude nicht in festen Zeitabständen bei stets gleicher Rotorstellung abgetastet wird. Das Ausgangssignal zeigt durch einen Impuls an, zu welcher Zeit und bei welcher Rotorstellung das linear ansteigende Vergleichsniveau des Schablonenschlitzes mit dem Momentanwert  $a$  des Lichtzeigerausfalls übereinstimmt, mißt also  $a$  nach (5.28) bei der Winkelstellung

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad (5.28)$$

des Rotors. Das Gerät zeigt daher nicht stets die gleiche Komponente des zu messenden Drehvektors an. Zwischen der Richtung dieser Komponente und dem durch  $a$  angezeigten Drehgeschwindigkeitsbetrag besteht die eindeutige Beziehung (5.28); man weiß also stets, was das Gerät mißt. Eine bestimmte Komponente kann aus der Anzeige mit einem elektronisch nur schwer zu bewältigenden Rechenaufwand berechnet werden. Das Abtasttheorem der Informationstheorie läßt sich hier nicht anwenden, weil es konstante Abtastintervalle verlangt. Daher muß  $\alpha$  so klein bleiben, daß  $\cos \alpha \approx 1$  gesetzt werden kann. Dann darf angenommen werden, daß stets eine bestimmte Komponente angezeigt wird, wobei der Fehler beispielsweise 0,4 % beträgt, wenn  $\alpha = 5^\circ$  ist. Die Dynamik  $\Delta t$  des Pulsabstands darf dann nicht größer sein als  $\pm 1,5\%$  der Umlaufzeit  $T = 1/\nu$  des Rotors, da

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (5.36)$$

ist. Dies ist zu beachten, wenn durch Vergrößerung des Faktors  $L/R$  in Gleichung (5.27) die Anforderungen an die Anstiegszeit des Photodetektors und die Genauigkeit der elektronischen Zeitmessung verringert werden sollen.

## 6. Aufbau des Versuchsgerätes

### 6.1. Rotor und Schwinger

Der Aufbau des Rotors ergibt sich bereits aus der Darstellung des Strahlengangs in Abb. 6. Basis des Rotors (Abb. 7) ist ein Teller mit einem Flansch

zur Befestigung auf der Motorwelle. Auf diesem Teller sind das Lager des Schwingers und zwei Kammern festgeschraubt, die den Schwinger gegen Luftströmungen schützen und die Rotorspiegel tragen. Der Luftwiderstand des Rotors wird durch eine Blechverkleidung verringert. Diese Blechverkleidung und eine Schwingerkammer sind in Abb. 7 entfernt worden. Durch den verschließbaren Zwischenraum zwischen den beiden Schwingerkammern sind die Tarierschrauben des Schwingers zugänglich.

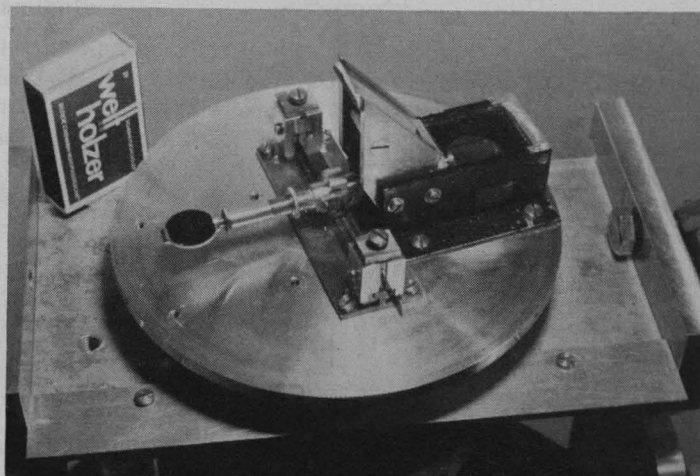


Abb. 7. Rotor, zweite Schwingerkammer und Abschirmhaube entfernt

Die zwei gekreuzten Blattfedern für die Lagerung des Schwingers sind in der in Abb. 8 dargestellten Weise zu beiden Seiten des zylindrischen Schwingers angebracht. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, sie in eine kleine Halterung einzulöten, die am Schwinger angeschraubt wird. Dann ist es einfacher, sie genau senkrecht einzulöten, was notwendig ist, damit die Blattfedern durch die Schwingerbewegung nur auf Torsion und nicht auf Biegung beansprucht werden. Am Rotor sind die Blattfedern durch Klemmvorrichtungen befestigt, die auf einer Schiene verschoben werden können, um mit der Federlänge den Richtfaktor  $D$  zu ändern. Durch die Schraube in den Klemmvorrichtungen werden diese auf der Schiene arretiert und gleichzeitig die Blattfedern festgeklemmt.

Das im wesentlichen zylindrische Mittelstück des Schwingers ist aus Aluminium gefertigt, damit es möglichst leicht ist, während die größten Massen an den Enden des Schwingers angeschraubt werden, wo sie zum Trägheitsmoment des Schwingers am meisten beitragen. Ebenfalls aus diesem Grunde ist das Mittelstück zum größten Teil hohl. Auf diese Weise wird ein günstiges Verhältnis der Masse zum Trägheitsmoment des Schwingers erreicht, das nach Abschnitt 4.4 die Beschleunigungsempfindlichkeit bestimmt. In das zylindrische Mittelstück sind an den Enden Halterungen aus Messing eingeschraubt, auf denen zwei Spiegel mit einem Gießharz festgeklebt wurden. Von den beiden

Spiegeln wurde letztlich nur einer benutzt, wie aus dem Strahlengang in Abb. 6 ersichtlich ist. Eine Schraube und eine Rändelmutter ermöglichen bei dem federgelagerten Schwinger Massenverschiebungen in den beiden Richtungen senkrecht zur Schwingerachse.

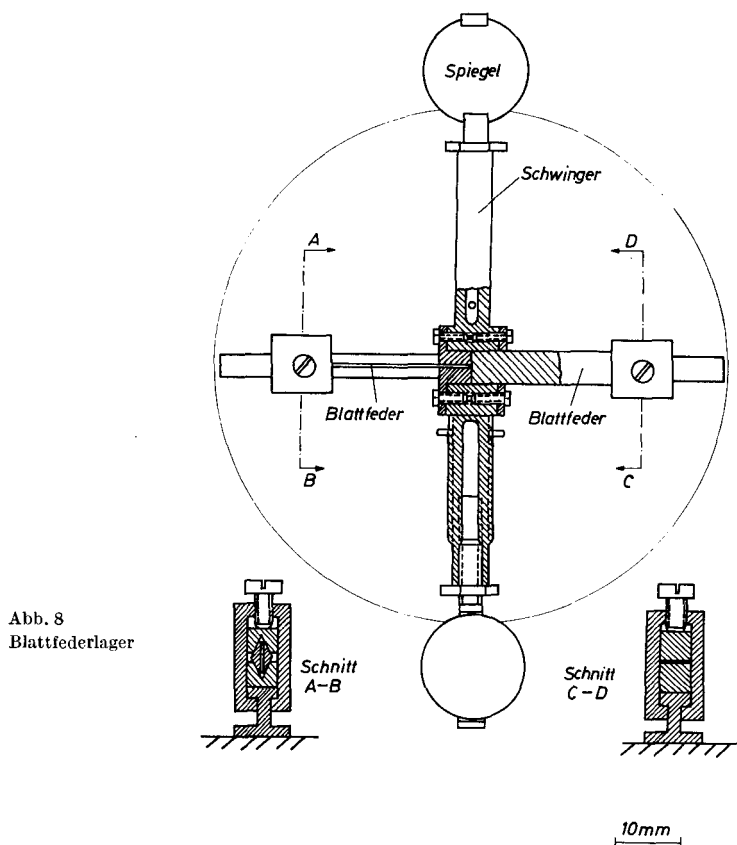


Abb. 8  
Blattfederlager

Bei den Bewegungen des Schwingers tritt Luftdämpfung auf, die durch Werkstoffdämpfung in den Federn und deren Halterungen unterstützt wird. Von der Werkstoffdämpfung ist bekannt, daß sie weitgehend konstant ist, die Luftdämpfung hingegen muß erst daraufhin untersucht werden, ob sie keine Nichtlinearitäten erzeugt. Den größten Beitrag zur Luftdämpfung liefern die Schwingerspiegel vom Durchmesser  $2a$ , deren Reynoldssche Zahl

$$\text{Re} = \frac{2a |v|}{\nu_k} \approx 270 \quad (6.1)$$

beträgt ( $|v|$  ist die Geschwindigkeit des Spiegels,  $\nu_k$  die kinematische Zähigkeit von Luft). Bei dieser Reynoldsschen Zahl ist eine stationäre Strömung bereits abgelöst, und der Widerstand hängt quadratisch von der Strömungsgeschwindigkeit ab. Jede Strömung braucht aber das Dreifache der charakteristischen

Länge des umströmten Körpers zum Anlaufen. U. a. in [22, p. 233] wird darauf hingewiesen, daß sich bei einer senkrecht angeströmten Platte zunächst eine Potentialströmung ausbildet, wobei der Widerstand dann nach der Stokeschen Formel linear von der Geschwindigkeit abhängt.

Ein solcher linearer Zusammenhang ergibt sich auch unter Berücksichtigung der Kompressibilität bei akustischer Betrachtungsweise, die den Schwingerspiegel als Kolbenmembran auffaßt [23, p. 285].

## 6.2. Gesamtaufbau

Einen Gesamteindruck des ganzen Rotor-Schwingkreisel vermittelt Abb. 9. Sämtliche Teile des Kreisel sind an einem stabilen Gestell befestigt, das um eine horizontale Achse in einem Ständer geschwenkt werden kann, damit sich der Kreisel in jede gewünschte Stellung zur Vertikalen und zu dem Drehtisch bringen läßt, auf dem das Gerät steht. Das freie Wellenende des Antriebsmotors trägt den Rotor mit dem in Abb. 9 nicht sichtbaren Schwinger. Die

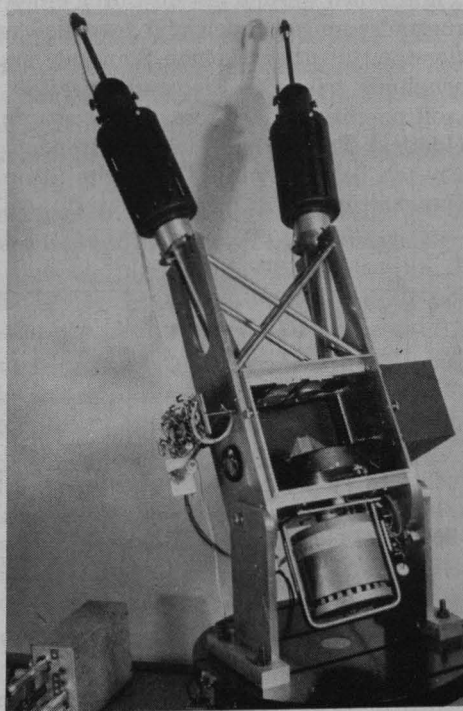


Abb. 9  
Dreh-Schwingkreisel

beiden kolbenartigen Lampen dienen als Lichtquelle für die optische Signalabnahme, während in zwei Kästen beiderseits des Rotors die Photozellen und Vorverstärker untergebracht sind.

Zum Antrieb des Rotors wird ein Hysteres-Synchronmotor Typ HSM 52.80-2/4-120D der Firma Papst verwendet, dessen Polzahl von 2 auf 4 umschaltbar ist. Dieser Motor besitzt einen Außenläufer, dessen Trägheitsmoment die

Drehzahlsteifigkeit verbessert, und der im Luftspalt bei größeren Flächen kleinere Felddichten erfordert, was für die Laufruhe vorteilhaft ist. Der Motor wird vom Netz oder über einen Kraftverstärker von einem Generator veränderlicher Frequenz gespeist, wenn die Drehzahl variabel sein soll. Der Motor muß von der Schwerkraft auf das Kugelspurlager an einem Achsende gedrückt werden und kann deshalb nur hängend betrieben werden.

Der optische Strahlengang ist sorgfältig gegen Fremdlicht abgeschirmt. In Abb. 9 ist der Deckel auf der Rotorkammer sowie die optische und elektrische Abschirmung des linken Photoverstärkers abgenommen.

### 6.3. Elektronische Signalverarbeitung

Die optische Signalabnahme arbeitet zur Messung einer Komponente des Drehvektors mit zwei Photozellen. Auf einen Bezugsimpuls in der einen Photozelle folgt der eigentliche Meßimpuls in der anderen Zelle. Der Zeitabstand zwischen beiden Pulsen wird digital gemessen.

Die Strompulse der Photozellen werden jeweils durch einen Arbeitswiderstand von 1 M $\Omega$  in Spannungspulse umgewandelt und anschließend verstärkt. Damit der große Arbeitswiderstand überhaupt einen Sinn hat, muß der Eingang des Signalverstärkers hochohmig sein. Die Eingangskapazität, welche die Grenzfrequenz bestimmt, soll möglichst klein sein. Daher wurde für die erste Verstärkerstufe ein Feldeffekt-Transistor C 680 verwendet, der durch einen Emittterfolger nur schwach belastet wird. Die zweite Stufe ist ein Begrenzerverstärker in Differenzschaltung.

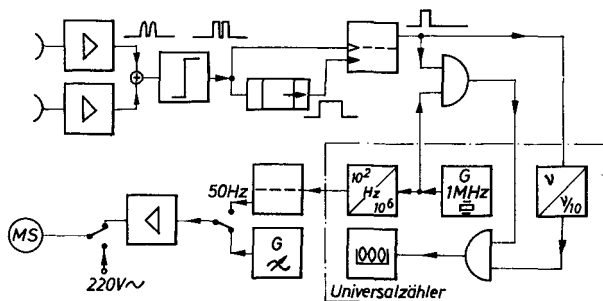


Abb. 10. Blockschaltbild der Signalverarbeitung

In jedem der beiden Signalkanäle treten abwechselnd Start- und Stopimpulse auf. Deshalb wurden die Pulse beider Kanäle gemeinsam auf einen Schmitt-Trigger zur Formung gegeben. Nach Abb. 10 gelangen die Doppelpulse danach auf eine bistabile Kippstufe, an deren Ausgang Pulse auftreten, deren Dauer gleich dem zu messenden Zeitintervall ist. Der Ausgang des Schmitt-Triggers steuert ferner eine monostabile Kippstufe an, die zwischen zwei Doppelpuls-Gruppen in ihre stabile Lage zurückkippt und dabei die bistabile Kippstufe nötigenfalls vor dem Eintreffen der nächsten Pulsgruppe in eine definierte Schaltstellung bringt. Auf diese Weise wird nach höchstens einer Fehlmessung stets der erste Puls einer Gruppe als Startimpuls wirksam, und das nach-



folgende Tor wird während des Meßintervalls geöffnet. Die Zählfrequenz gelangt durch das Tor auf einen Zähler, dessen Anzeige der Drehgeschwindigkeit proportional ist.

Nach Abschnitt 5.2 muß über eine gerade Anzahl von Messungen gemittelt werden, damit eine Wanderung der Ruhelage des Schwingers kompensiert wird. Dazu wurden die Möglichkeiten eines Universalzählers 7370 H der Firma Beckman genutzt. Die durch das Tor der Pulsverarbeitung gelangten Zählpulse werden auf das Tor des Zählers gegeben, das mit Hilfe eines Teilers für 10 Messungen offengehalten wird. Der im Zähler vorhandene Quarzoszillator liefert eine sehr konstante Zählfrequenz, die gleichzeitig, durch den ebenfalls im Zähler eingebauten Teiler auf 100 Hz heruntergesetzt, den Antrieb des Kreisel-Synchronmotors mit der Zählfrequenz synchronisieren kann. Es ergaben sich keinerlei Schwierigkeiten, wenn der Kreiselmotor vom Netz oder einem RC-Generator gespeist wurde.

Die Anzeige des Zählers enthält eine additive Konstante, da der Drehgeschwindigkeit Null ein von Null verschiedener Pulsabstand entspricht. Die Pulsdauer in der Nähe des Nulldurchgangs zuverlässig zu messen, würde erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Die additive Konstante läßt sich hingegen leicht entfernen. Werden die Schablonen im Strahlengang der Signalabnahme so eingestellt, daß der Zähler bei der Drehgeschwindigkeit Null gerade eine volle Zehnerpotenz anzeigt, dann ist eine 1 in der ersten Stelle der benutzten Zählerdekaden als + zu lesen. Bei entgegengesetzter Drehrichtung tritt in der ersten Stelle eine 0 auf, die als - zu lesen ist. Die Ziffernanzeige selbst ist dann das algebraische Komplement zu der für die Nullanzeige gewählten Zehnerpotenz. Diese Art der Anzeige ist für die Weiterverarbeitung in Rechnern sehr geeignet. Besonders einfach läßt sich eine Integration über die Drehgeschwindigkeit durchführen. Dazu wird lediglich fortlaufend gezählt und eine 1, in diesem Fall nach je 10 Messungen, in der ersten Dezimalen subtrahiert.

Während bei Verwendung von Photodioden die Kippstufen durch die ansteigende Pulsflanke zu triggern sind, da die Abfallzeit das 10- bis 20fache der Anstiegszeit beträgt, kann mit Photozellen auf beiden Flanken getriggert werden. In jedem Fall sind Start- und Stopimpuls auf der gleichen Flanke zu triggern, damit sich Intensitätsschwankungen der Lichtquellen und thermische Drift der Eingangsverstärker weitgehend kompensieren, wobei eine ungleichmäßige Drift beider Kanäle bei der Mittelung über eine gerade Anzahl von Messungen herausfällt. Dann kann nur noch eine ungleichmäßige Drift der beiden Triggerschwellen der bistabilen Kippstufe stören.

Photozelle und Signalverstärker sind für beide Kanäle unmittelbar am Kreiselrahmen befestigt und durch ein Blechgehäuse gegen Lichteinfall und elektrische Störfelder geschützt.

#### 6.4. Abgleicharbeiten

Da wegen des ohnehin vorhandenen Richtfaktors der Federlagerung eine rein dynamische Abstimmung nach Abschnitt 5.1.1 nicht in Betracht kommt, sollte der Schwerpunkt des Schwingers möglichst genau auf seiner Drehachse liegen. Eine Exzentrizität  $r$  senkrecht zu der die Schwingerachse enthaltenden Rotationsebene verursacht unmittelbar eine Beschleunigungsempfindlichkeit,

deren Auswirkung auf die Anzeige durch Gleichung (4.67) in Abschnitt 4.4 beschrieben wird. Liegt der Schwerpunkt in der genannten Rotationsebene und hat von der Drehachse den Abstand  $c$ , so wird die Schwerkraft nur mittelbar wirksam. Ihr Einfluß auf die Anzeige läßt sich nach Abschnitt 5.1.1 gering halten; durch die Schwerkraft verändert sich dann im wesentlichen die Nullage, was wegen der vorgesehenen Kompensation bedeutungslos ist. Das Austarieren des Schwingers in Richtung der Rotationsebene braucht daher nicht so sorgfältig zu geschehen wie senkrecht zu ihr.

Zur Verschiebung des Schwingerschwerpunkts werden Tarierschrauben in beiden Richtungen bewegt. Während der Rotor stillsteht, wird zunächst bei senkrechter Schwingerachse die von der Torsionsfeder vorgegebene Nullage ermittelt. Eine elektronische Anzeige der Nullage ist bei stillstehendem Rotor nicht möglich. Deswegen müssen die Photozelle, die davor angebrachte Linse und die Schablone aus dem Strahlengang entfernt und durch eine Mikroskop mit Meßokular zur Beobachtung des von der optischen Signalabnahme erzeugten Bildpunktes ersetzt werden. Nachdem das gesamte Gerät so geschwenkt wurde, daß die Schwingerachse waagerecht liegt, werden die Tarierschrauben so betätigt, daß der Bildpunkt an der bei senkrechter Schwingerachse ermittelten Nullstelle liegt. Hat man diese Übereinstimmung bei waagerechter und senkrechter Richtung der Längsachse des Schwingers erreicht, ist ein Moment der im Schwerpunkt angreifenden Schwerkraft um die Drehachse nicht mehr nachzuweisen.

Die große Versuchsausführung des Kreisels verzog sich wegen der langen mechanischen Wege beim Schwenken gegen die Richtung des Schwerfeldes. Um diese Verbiegungen zu berücksichtigen, wurden zunächst Messungen durchgeführt, bei denen der Schwingerspiegel durch einen starr mit dem Kreiselgehäuse verbundenen Spiegel ersetzt war.

Trotz sorgfältigsten Austarierens behält der Schwerpunkt von der Schwingerachse stets einen, wenn auch kleinen Abstand. Eine Unwucht des Rotors gibt Anlaß zu Vibrationen, die den Schwingerschwerpunkt periodisch beschleunigen. Die Frequenz dieser Beschleunigungen ist gleich der Rotationsfrequenz und somit gleich der Trägerfrequenz des Signals, ihre Amplitude wächst quadratisch mit der Frequenz. Deshalb würden die von einer Restunwucht verursachten Vibrationen zu einem unerträglichen Störpegel führen, wenn auch die Frequenz der von ihnen erzeugten Momente um die Schwingerachse gleich der Signalfrequenz wäre. Das ist jedoch nicht der Fall.

Die Vibrationen verursachen durch anisoelastische Lagerung der Rotorachse vorwiegend Längsschwingungen senkrecht zur Rotorachse. Während eine konstante Beschleunigung  $g$  in einer solchen Richtung um die Schwingerachse das infolge der Rotordrehung periodische Moment

$$m_s r g \sin \omega t \quad (6.2)$$

erzeugt, wirkt am Hebelarm  $r$  bei den periodischen Beschleunigungen  $g_0 \sin (\omega t + \delta)$  durch Längsschwingungen das Moment

$$m_s r g_0 \sin (\omega t + \delta) \sin \omega t = -\frac{1}{2} m_s r g_0 [\cos (2 \omega t + \delta) - \cos \delta] \quad (6.3)$$

Es entsteht ein Störmoment mit der Frequenz  $2\omega$ , das vom Schwinger herausgefiltert wird, und ein konstantes Störmoment, das lediglich die Nullage verschiebt. Längsschwingungen senkrecht zur Rotationsachse können also nicht unmittelbar Störungen im Signalband erzeugen. Sie können jedoch durch Modenkonversion Schwingungen in Richtung der Rotorachse verursachen, die den Schwerpunkt des Schwingers an einem in der Rotationsebene gelegenen Hebelarm  $c$  beschleunigen und den Schwinger in seiner Resonanz erregen. Deshalb muß durch Tarieren auch der Hebelarm  $c$  verkleinert werden. Weil das bei dem dynamisch abgestimmten Schwinger nach Abschnitt 5.1.1 nicht möglich ist, entsteht bei Verwendung eines solchen Rollagers ein beträchtliches Störsignal.

Die Vibrationsbeschleunigungen werden durch sorgfältiges statisches und dynamisches Auswuchten des Rotors verringert, wobei zum Rotor auch der Antriebsmotor mit seinem Außenläufer zu rechnen ist. Um einen Körper statisch und dynamisch auszuwuchten, muß die Unwucht in zwei Ausgleichsebenen bestimmt und ausgeglichen werden [24]. Dazu wird die Achse des Körpers in den üblichen Wuchtmaschinen an zwei Stellen so gelagert, daß jeweils ein Lager senkrecht zur Achsrichtung schwingen kann. Nun ist die Achse des Kreiselmotors mit aufgesetztem Rotor nicht an zwei Stellen zugänglich, keinesfalls in zwei Ebenen, in denen ein Ausgleich durchgeführt werden könnte. Daher wurde der Kreisel zum restmomentenfreien Ausgleich der Unwuchten nacheinander um zwei zur Rotorachse senkrechte Achsen dreh-schwingungsfähig gelagert. Es ist zweckmäßig, die Eigenfrequenz dieser Drehschwingungen klein gegen die Rotationsfrequenz zu wählen, also überkritisch auszuwuchten, da für unterkritische Wuchtung der Kreisel praktisch starr gelagert werden muß und dann keine festen Drehachsen mehr hat.

Die Amplitude der Drehschwingungen wird durch Beschleunigungsaufnehmer gemessen, verstärkt und auf einem Oszillographen angezeigt. Dieser Oszillograph wird durch ein Stroboskop getriggert, das den Rotor bei jedem Umlauf genau einmal beleuchtet. Wird der Oszillograph gerade im Maximum der Drehschwingungen getriggert, so läßt sich aus der Winkelstellung des Rotors die Lage der Unwucht genau ersehen.

## 7. Experimentelle Erprobung des Dreh-Schwingkreisels

Für die experimentelle Erprobung des Dreh-Schwingkreisels stand ein Drehtisch der Firma Novotechnik, Typ SDt 04-01, zur Verfügung. Die Drehgeschwindigkeit des Tisches läßt sich dekadisch in vier Stufen und innerhalb der Dekaden stufenlos von 0,05 bis 500 °/s regeln. Die Stromversorgung des Prüflings und die Übertragung elektrischer Signale erfolgt über 14 Schleifer und Schleifringe. Damit die Drehachse des Tisches beliebig im Raum orientiert und vor allem in die Richtung der Erdachse gebracht werden kann, wurde der Drehtisch auf einen Schwenktisch gestellt. Die Versuche wurden ohne Betonfundament im zweiten Stock eines Gebäudes durchgeführt; die dort unvermeidlichen Erschütterungen störten die Messungen nur wenig.

Die Anzeige des Wendezeigers war zunächst keineswegs proportional zur Drehgeschwindigkeit. Die Art der Nichtlinearität änderte sich nach jedem neuen Einspannen der Blattfederlagerung. Diese Nichtlinearität ist in charakte-

ristischer Weise besonders stark ausgeprägt in der Kennlinie, die Abb. 11 zeigt, weil der Rotor bei Aufnahme dieser Kennlinie nicht ausgewuchtet war. Bei Vergrößerung der Drehgeschwindigkeit hat die Kennlinie in beiden Drehrichtungen einen völlig andersartigen Verlauf als bei Verlangsamung der Drehung. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Mittellinien der beiden gekreuzten Blattfedern nicht genau zusammenfielen. Dann ist die Aufhängung nicht mehr symmetrisch, die Blattfedern werden nicht nur auf Torsion, sondern auch auf Biegung beansprucht; die Lage der Drehachse verschiebt sich im Schwinger in Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel. Wenn der Schwinger erst

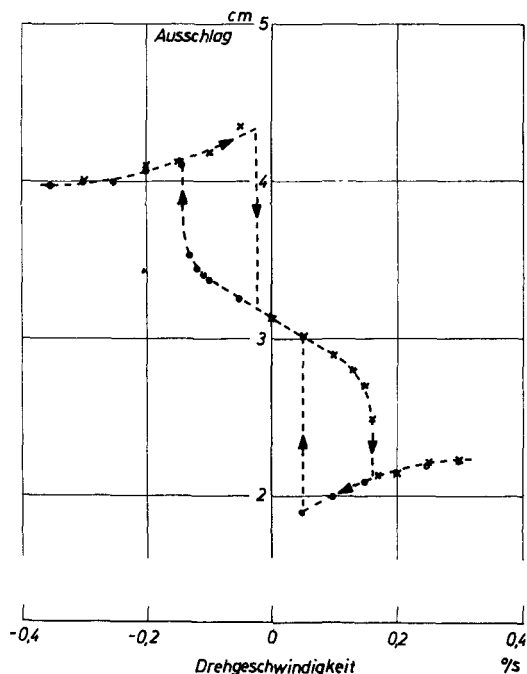


Abb. 11. Kennlinie bei nicht fluchtenden Blattfedern

einmal zu schwingen begonnen hat, können die von der Unwucht herrührenden Vibrationen den Schwinger erregen. Da die Exzentrizität  $r$  dann periodisch veränderlich ist, ergibt das Glied  $1/2 m_s r g_0 \cos \delta$  aus Gleichung (6.3) unmittelbar eine Erregung mit der Eigenfrequenz des Schwingers. Außerdem greift die Schwerkraftkomponente in Richtung der Rotorachse an einem periodisch veränderlichen Hebelarm  $c$  an. Bei hinreichend großen Schwingerausschlägen genügt diese Erregung zur Aufrechterhaltung der Schwingungen; die Drehgeschwindigkeit kann erheblich verringert werden, ehe der Ausschlag auf den linearen Teil der Kennlinie zurückgeht. In manchen Fällen war dieses Zurückgehen nur durch eine entgegengesetzte Drehung zu erzwingen.

Nachdem die Ursache der anfänglich beobachteten Nichtlinearität des Dreh-Schwingkreises mit Blattfederlagerung erkannt war, wurden die Blattfedern

so am Schwinger befestigt, daß beim Anbringen der Federn ihre Mittellinien gut zu fluchten waren. Während die Blattfedern zunächst unmittelbar in den Schwingerkörper eingelötet waren, wurden sie nunmehr in Halterungen weich eingelötet, die dann mit dem Schwingerkörper verschraubt wurden, wie es in Abb. 8 dargestellt ist. Die Halterungen, die Abb. 5 in einer Photographie zeigt, sind aus längeren Zylindern mit geschlitztem Flanschende entstanden. Beim Einlöten der Federn in die Schlitze wurde darauf geachtet, daß die Mantellinien des Zylinders und die Federkanten gut fluchteten. Dann fluchten auch die beiden Federn, da die zu verschraubenden Flächen mühelos parallelgehalten werden können. Unmittelbar nach dem Einbau des auf diese Weise gelagerten Schwingers war noch eine merkliche Nichtlinearität vorhanden, die jedoch nach mehrstündigem Betrieb verschwand. Durch Fließen in den weichen Lötstellen wird offenbar ein vollkommenes Fluchten selbsttätig erreicht, wenn die Federn halbwegs fluchtend eingelötet worden sind.

Die nunmehr lineare Kennlinie war gut reproduzierbar. Sie konnte nur bis  $54^\circ/\text{h}$  aufgenommen werden, da größere Schwingerausschläge von der Signalabnahme nicht mehr erfaßt wurden. Zum Nachweis der Linearität unterhalb von  $10^\circ/\text{h}$  wird bei Kreiselproben die Erddrehung als Eingangsdrehung benutzt. Dazu werden Drehtisch- und Rotorachse vertikal gestellt. Dann läuft die Eingangssache des Kreisels mit Drehtischgeschwindigkeit in einer horizontalen Ebene um. Die Horizontalkomponente der Erddrehung, die in der geographischen Breite Tübingens recht genau  $10^\circ/\text{h}$  beträgt, verursacht dabei ein Signal, das sich in Abhängigkeit von der Drehtischstellung sinusförmig ändert. Die digitale Anzeige des Dreh-Schwingkreisels ist in Abb. 12 für einen vollen Umlauf des Drehtisches aufgetragen. Die Meßwerte liegen sehr genau auf einer Sinuskurve.

Werden die Drehtischachse und die Rotorachse in die Richtung der Erdachse geschwenkt, so steht die Eingangssache des Kreisels senkrecht auf allen Drehachsen; die Anzeige sollte dann nicht von der Stellung des Drehtisches abhängen. Bei einer Drehung um eine polare Achse ändert der Kreisel jedoch

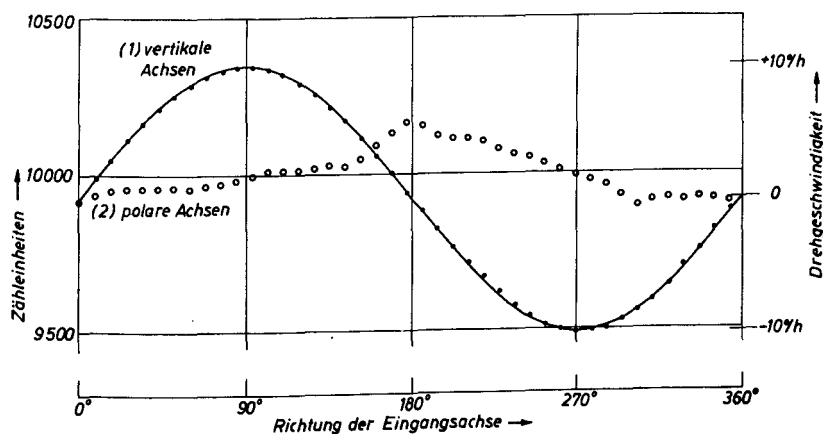


Abb. 12. Der Einfluß von Erddrehung (1) und Erdbeschleunigung (2)

seine Orientierung zum Gravitationsfeld, so daß der Polarachsentest zur Prüfung der Beschleunigungsempfindlichkeit von Kreiseln benutzt werden kann. Der Verlauf der Anzeige des Dreh-Schwingkreisels in Abhängigkeit von der Drehtischstellung zeigt ein Maximum bei  $180^\circ$ , das durch Tarieren des Schwingers nicht zu beseitigen war. Wenn der Schwinger auf Beschleunigungen reagiert, muß das Maximum, je nach Richtung der Exzentrizität des Schwerpunkts, bei  $90^\circ$  oder  $270^\circ$  liegen. Dies folgt durch einfache Überlegungen aus der Orientierung des Kreisels zum Schwerfeld bei den genannten Winkelstellungen und wurde experimentell bestätigt. Daher muß die vom Polarachsentest aufgedeckte Beschleunigungsempfindlichkeit zum größten Teil auf Verbiegungen des gesamten Gerätes zurückzuführen sein, von denen die beiden Strahlengänge der Signalabnahme ungleichmäßig betroffen sind, und die daher nicht kompensiert werden. Da keine Möglichkeit besteht, ein Gerät mit großen mechanischen Wegen wesentlich besser zu versteifen, kann die eigentliche Beschleunigungsempfindlichkeit des gyroskopischen Elements, die mit Sicherheit unter  $5^\circ/\text{h/g}$  liegt, erst dann experimentell bestimmt werden, wenn ein neues, kleineres Gerät gebaut ist. Auch eine eventuelle Anisoelelastizität des Schwingerlagers, die sich aus der 1. Harmonischen der Anzeige eines Polarachsentestes ermitteln läßt, ist in Gegenwart der Störung durch die Verbiegungen nicht nachzuweisen.

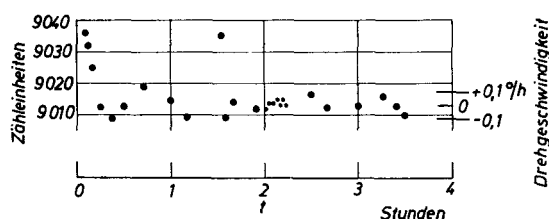


Abb. 13. Zeitliche Konstanz des Nullsignals

Die zeitlichen Schwankungen der Anzeige des Rotor-Schwingkreisels wurden bei stillstehendem Drehtisch mit vertikaler Rotorachse  $3\frac{1}{2}$  Stunden lang beobachtet und in Abb. 13 aufgetragen. Der Maßstab der Ordinate von Abb. 13 ist gegen Abb. 12 um den Faktor 10 gedehnt. Die Schwankungen des Nullsignals werden zu einem nicht geringen Teil auf Erschütterungen und Vibrationen des Gebäudes zurückzuführen sein, in dessen 2. Stock die Versuche vorgenommen wurden, denn die mit Erschütterungen verbundenen Drehbewegungen werden von dem Kreisel angezeigt. Unter diesen ungünstigen Voraussetzungen schwankte das Nullsignal um  $\pm 0,1^\circ/\text{h}$ , wobei eine steigende oder fallende Tendenz, abgesehen von den ersten 10 Minuten nach dem Einschalten von Elektronik, Lampen und Rotor, nicht zu beobachten war. Die in Abb. 13 eingetragenen Meßwerte sind, bis auf die eng zusammenliegende Gruppe nach 2 Stunden, aus je 5 Messungen im Abstand von 1 s gemittelt worden. Die Streuung dieser Messungen betrug im quadratischen Mittel  $\pm 0,05^\circ/\text{h}$ . Dieser Wert ist der mittlere Fehler der Einzelmessungen. Das Auflösungsvermögen der Signalabnahme liegt bei  $\pm 0,04^\circ/\text{h}$ , was durch Austauschen des Schwingerspiegels gegen einen starren Spiegel festgestellt wurde.

Abb. 14 zeigt den Schwingerausschlag als Funktion der Zeit, nachdem eine gleichförmige Drehung um die Eingangsachse des Dreh-Schwingkreisels plötzlich gestoppt wurde. Nach 23 s ist der Ausschlag um den Faktor  $1/e$ , also um 1 Neper, kleiner geworden. Die Abklingkonstante  $\beta$  ist gleich dem Kehrwert dieser Zeitkonstanten von 23 s, während die Bandbreite  $\Delta \nu = \frac{2\beta}{2\pi} = 0,014 \text{ Hz}$  beträgt, was bei einer Betriebsfrequenz  $\nu$  von etwa 22 Hz einer Güte  $Q = \frac{\nu}{\Delta \nu} = 1600$  entspricht.

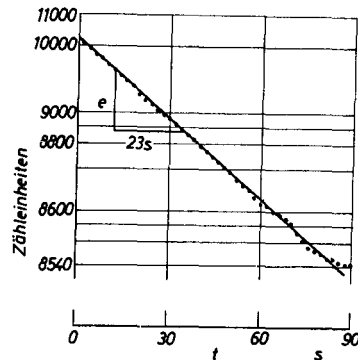


Abb. 14. Ermittlung der Einschwingzeit

## 8. Zusammenfassung

Die Theorie des gefesselten Kreisels, des Stimmgabel-Wendezeigers und auch des Dreh-Schwingkreisels führt auf Schwingungs-Differentialgleichungen, die nur unter einschränkenden Voraussetzungen geschlossen zu integrieren sind. Diese Voraussetzungen sind für alle drei Wendezeiger sehr ähnlich und für die beiden Kreisels fast völlig gleich. Sie verlangen, daß bestimmte Komponenten der Drehgeschwindigkeit klein sind gegen die Kreisfrequenz der Rotation oder der Zinkenschwingung und gegen den Kehrwert der Übertragungsfunktion des betrachteten Wendezeigers. Außerdem darf sich die Drehgeschwindigkeit während der Periodendauer eines Rotorums laufs oder einer Zinkenschwingung nicht zu stark ändern. Klassische Kreisels und Dreh-Schwingkreisels sind theoretisch in gleichem Maße beschleunigungsempfindlich. Die Anzeige des Dreh-Schwingkreisels hängt im Gegensatz zum gefesselten Kreisels nicht von der Rotordrehzahl ab. Wenn sich die Drehzahl etwas ändert, bleibt die Abstimmung der Schwingungsfrequenz auf die Rotorfrequenz erhalten.

Bei der technischen Ausführung eines Dreh-Schwingkreisels stellen sich vor allem zwei Aufgaben, für die Lösungsmöglichkeiten untersucht und verglichen wurden. Erstens muß ein zweckmäßig geformter Körper im Rotor dreh-schwingungsfähig gelagert werden. Hierfür wurde ein Lager aus zwei gekreuzten Blattfedern gewählt und erwies sich als sehr geeignet. Wie theoretische und experimentelle Untersuchungen zeigen, kann als Alternative ein Schneidenlager in Betracht gezogen werden. Die zweite Aufgabe besteht darin, die Schwingungen des im Rotor gelagerten Körpers, deren Amplitude der zu messenden Drehgeschwindigkeit proportional ist, außerhalb des Rotors im Fahrzeug anzuzeigen. Eine optische Signalabnahme arbeitet sehr zuverlässig und liefert

ein pulsmoduliertes Signal, das sich in einfacher Weise digitalisieren läßt. Mit zwei gleichgebauten Vorrichtungen für die Signalabnahme mißt ein Dreh-Schwingkreis gleichzeitig zwei Komponenten der Drehgeschwindigkeit. Eine mit geringem Aufwand ohne besondere Präzision gefertigte Versuchsausführung des Dreh-Schwingkreises, von der man eine große Lebensdauer erwarten darf, erreicht eine Ansprechschwelle von  $0,05^\circ/\text{h}$  und übertrifft damit die bisher bekannten Wendezeiger. Die Anzeige ist bis zu Drehgeschwindigkeiten von wenigstens  $50^\circ/\text{h}$  linear und schwankt unter dem Einfluß leichter Erschütterungen bei normalen Veränderungen der atmosphärischen Verhältnisse während mehrerer Stunden im quadratischen Mittel um weniger als  $0,1^\circ/\text{h}$ .

## Literatur

- [1] *R. A. Arnold, L. Maunder*: Gyrodynamics. London, New York 1961.
- [2] *E. Mühlenfeld*: Der Stimmgabel-Wendezeiger. 72. Stuttgarter Luftfahrtgespräch, 26. 10. 1965.
- [3] *R. v. Eötvös*: Experimenteller Nachweis der Schwereänderung, die ein auf normal geformter Erdoberfläche in östlicher oder westlicher Richtung bewegter Körper durch diese Bewegung erleidet. Ann. d. Physik **59** (1919), S. 743—752.
- [4] *D. Pekar*: Baron Roland v. Eötvös' wissenschaftliche Laufbahn. Naturwissensch. **7** (1919), S. 387—391.
- [5] *E. Arrea*: Gyroscopic Compass and Latitude Indicator. US. Pat. 1 801 619 (1931).
- [6] *E. H. Birdsall*: Means and Apparatus for Utilizing Gyrodynamic Energy. US. Pat. 2 716 893 (1955).
- [7] *J. L. Philpot, J. H. Mitchell*: Improvements in or Relating to Means for Controlling the Orientation of Gyroscopes and Other Rotating Masses. Brit. Pat. 599 826 (1948).
- [8] *R. Dorand*: Détecteur de Vitesse Angulaires et ses Applications. Franz. Pat. 1 008 538 (1952).
- [9] *B. A. Hunn*: Gyroscope de Mesure de Vitesse. Franz. Pat. 1 273 726 (1961).
- [10] *J. Maillard*: Perfectionnements aux Dispositifs de Mesure de Vitesses Angulaires. Franz. Pat. 1 315 839 (1962).
- [11] *F. H. Wood*: Indicateur de Vitesse de Virage. Franz. Pat. 1 342 490 (1963).
- [12] *B. Hamel*: Dispositif de Détection de Vitesse Angulaires. Franz. Pat. 1 328 401 (1963).
- [13] *N. D. Diamantides*: The Gyrovibrator. IRE Trans. on Aeron. and Nav. Electr. **6** (1959), S. 16—25.
- [14] *H. Sorg*: Der Wendekreis mit unsymmetrischem Läufer. Diss. TH Stuttgart 1965.
- [15] *G. O. Firdlender*: Aircraft Gyroscopes (selected parts). Übersetzung aus dem Russischen. FTD-TT-62-1560/1+2 Air Force Systems Command, AD-413 521, Mai 1963.
- [16] *E. W. Hove*: The Dynamically Tuned Free Rotor Gyro. Contr. Engn. **11/6** (1964), S. 67—72.
- [17] *B. V. Bowden*: Gyroscopes. US. Pat. 2 991 659 (1961).
- [18] *J. B. Scarborough*: The Gyroscope. London, New York 1961.
- [19] *A. Stratton, G. H. Hunt*: The Sensitivity of Vibratory Gyroscopes to Acceleration. In: IUTAM Symposium Celerina 1962, Springer-Verlag 1963, S. 299—303.
- [20] *H. Troeger*: Considerations in the Application of Flexural Pivots. S.-A. aus: Automatic Control **17** (1962) Nr. 4, 6 S.
- [21] *A. u. L. Föppl*: Drang und Zwang. II. Band, 2. Aufl. Berlin, München 1928.
- [22] *W. Kaufmann*: Technische Hydro- und Aeromechanik. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958.
- [23] *E. Skudrzyk*: Die Grundlagen der Akustik. Springer-Verlag, Wien 1954.
- [24] *W. Späth*: Die Wuchtfibel. Verlag W. Girardet, Essen 1962.